Árvores lógicas

Desidério Murcho
Universidade Federal de Ouro Preto

Um aspecto curioso acerca de qualquer argumento válido é que se negarmos a sua conclusão geramos um conjunto inconsistente de proposições. Tome-se, por exemplo, o seguinte argumento:

> Se a justiça é uma mera ficção, não tem qualquer vantagem real sobre a injustiça.
> Mas a justiça tem vantagens reais sobre a injustiça.
> Logo, a justiça não é uma mera ficção.

A sua forma lógica é o *modus tollens:*

> $P \rightarrow \neg Q$
> Q
> $\therefore \neg P$

Evidentemente, se fizermos um inspetor de circunstâncias, verificamos que esta forma argumentativa é válida. O que é curioso é que se negarmos a sua conclusão obtemos um conjunto inconsistente de proposições.

- Um conjunto de proposições é inconsistente quando não há qualquer circunstância em que todas as proposições sejam verdadeiras.

P Q	$P \rightarrow \neg Q$	Q	P
V V	F	V	V
V F	V	F	V
F V	V	V	F
F F	V	F	F

Este aspecto é evidente: se num argumento válido não há qualquer circunstância em que as suas premissas sejam verdadeiras e a sua conclusão falsa, ao negar a sua conclusão ficamos sem qualquer circunstância em que as suas premissas sejam verdadeiras e a sua conclusão seja também verdadeira. E portanto ficamos sem qualquer circunstância em que todas as proposições do argumento sejam verdadeiras.

Este aspecto da argumentação válida é usado numa forma argumentativa chamada *redução ao absurdo* (*reductio ad absurdum*). Numa redução ao absurdo negamos a conclusão que queremos provar e derivamos daí uma inconsistência; se conseguirmos fazer isto, mostramos que o argumento com a conclusão original, antes de a termos negado, era válido — era válido porque só quando um argumento é válido a negação da sua conclusão dá origem a uma inconsistência.

Na vida quotidiana usamos por vezes variações desta forma de argumentação. Por exemplo, uma pessoa afirma algo. Nós queremos mostrar o contrário. E o que fazemos? Aceitamos a sua afirmação, e mostramos que dela se segue uma inconsistência qualquer. Por exemplo:

> — Nada existe.
> — Hum… tens a certeza? Admitamos que nada existe. Nesse caso, nada disseste mesmo agora. Mas é óbvio que admites que disseste algo mesmo agora. Portanto, se nada existe, segue-se que disseste e não disseste algo mesmo agora. Mas isto é absurdo. Logo, é falso que nada exista.

Assim, no nosso método de demonstração, vamos transformar qualquer forma argumentativa do seguinte modo: às premissas dadas, acrescentamos a negação da conclusão. Se daqui resultar uma inconsistência, a forma argumentativa original era válida; se não, a forma argumentativa válida não era válida.

Árvores lógicas

As árvores de demonstração já receberam vários nomes. Começaram por se chamar *tableaux,* em inglês.[1] Esta palavra inglesa vem do francês antigo para imagem. Depois começou-se a usar em inglês uma ortografia simplificada: *tableau*. Em ambos os casos, usava-se o qualificativo “semantic,” ficando-se com *semantic tableau*. Isto foi traduzido por “árvores semânticas,” porque também se começou a falar em inglês de *semantic trees*. Contudo, confunde as coisas falar de árvores semânticas, pois num certo sentido não são semânticas, mas antes sintáticas. Por isso, usa-se hoje habitualmente o termo *logic trees*, que se pode traduzir por “árvores lógicas” ou *tree proofs* (demonstrações em árvore).

O primeiro aspecto das árvores lógicas, é que se trata de um método que procede por redução ao absurdo. Por isso, vamos sempre juntar a negação da conclusão em causa às premissas do argumento e tentar chegar a uma inconsis-

[1] Apesar de terem sido sugeridas pela primeira vez por um lógico holandês, Evert W. Beth (1908–64), as árvores lógicas só se tornaram mais conhecidas com o trabalho do norte-americano Raymond M. Smullyan.

tência. Se conseguirmos fazer isso sem errar, demonstramos a validade da forma argumentativa original. Caso contrário, demonstramos a sua invalidade (caso não nos tenhamos enganado).

O segundo aspecto das árvores lógicas é proceder sempre por simplificação de fórmulas. Perante qualquer fórmula em qualquer momento da nossa demonstração, só há uma maneira correta de a simplificar. E continuamos a fazer este trabalho de simplificação até 1) chegar a uma inconsistência ou 2) não haver mais fórmulas complexas que possam ser simplificadas.

O terceiro aspecto das árvores lógicas é que estas representam graficamente as disjunções e as conjunções — e é por isso que dão origem a coisas parecidas com árvores (com ramos e um tronco principal). Por exemplo, a simplificação da forma lógica $P \rightarrow Q$ é $\neg P \vee Q$, mas representaremos isso graficamente fazendo dois ramos:

$P \rightarrow Q$

$\neg P$ $\quad$ Q

Quando a simplificação é uma conjunção, limitamo-nos a colocar a forma lógica por debaixo da outra. Por exemplo, a simplificação da conjunção é feita assim:

$P \wedge Q$
P
Q

Para nos orientarmos, vamos numerar as fórmulas e chamar passos a cada um dos casos:

1. $P \rightarrow Q$

2. $\neg P$ (1) $\quad$ 3. Q (1)

Os números com o ponto (1., 2., 3.) numeram os passos do raciocínio. Os números entre parênteses dizem-nos de onde resulta a forma em causa. Fazendo o mesmo ao segundo exemplo, obtemos o seguinte:

1. $P \wedge Q$
2. P (1)
3. Q (1)

Façamos agora uma árvore que demonstra a validade do *modus ponens:*

$P \to Q$
P
$\therefore Q$

Começamos por juntar a negação da conclusão às premissas, e depois simplificamos a única forma complexa que temos; o resultado é o seguinte:

1. $P \to Q$
2. P
3. $\neg Q$

4. $\neg P$ (1) — 5. Q (1)
X — X

Se olharmos com atenção para a forma do passo 4, vemos que ela nega a forma do passo 2: uma é a negação da outra. Chegamos por isso a uma inconsistência e assinalamos isso com uma cruz. E o mesmo ocorre com a forma do passo 5: também é inconsistente com uma forma anterior, mas neste caso a forma do passo 3.

Quando em todos os ramos de uma árvore temos uma inconsistência, fechamos o ramo com a cruz. Quando todos os ramos fecham, a forma argumentativa original era válida; quando pelo menos um ramo não fecha, a forma original não era válida.

Vejamos o que acontece com a falácia da afirmação da consequente:

Forma argumentativa

$P \to Q$
Q
$\therefore P$

Árvore lógica

1. $P \to Q$
2. Q
3. $\neg P$

4. $\neg P$ (1) — 5. Q (1)

Agora, nenhum dos ramos fechou. E como não temos mais formas complexas para simplificar, demonstramos que a forma original era inválida. Seria inválida mesmo que um dos ramos fechasse, pois basta um ramo ficar aberto para ficar demonstrada a invalidade.