

# Árvores lógicas

Desidério Murcho

Universidade Federal de Ouro Preto

Até agora, construímos uma linguagem artificial, o logiquês, que entre outras coisas permite isolar a forma lógica dos argumentos e determinar a sua validade ou invalidade, fazendo um inspetor de circunstâncias. Contudo, os inspetores tornam-se fastidiosos quando os argumentos têm três ou mais variáveis proposicionais. Além disso, não poderão ser usados quando estudarmos lógica de predicados. Um dos valores dos inspetores é tornar clara a noção intuitiva de validade dedutiva: nos inspetores vê-se o que significa dizer que num argumento dedutivo válido é impossível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa. Mas a lógica propriamente dita não é feita de inspetores, mas antes de métodos de demonstração mais sofisticados e puramente sintáticos. O que quer isto dizer?

Ao testar a validade de uma dada forma argumentativa usando um inspetor estamos a fazer um teste semântico de validade, pois consideramos sistematicamente todas as circunstâncias em que as premissas são verdadeiras e vemos se em alguma delas a conclusão é falsa. Mas o núcleo da lógica formal propriamente dita são os métodos sintáticos para testar validades, e não semânticos. A diferença é que num teste sintático conseguimos demonstrar a validade ou a invalidade de uma dada forma procedendo apenas à manipulação de formas lógicas, sem ter em consideração a semântica dessas formas, isto é, as circunstâncias em que são verdadeiras ou falsas. Fazemos isto estabelecendo um pequeno conjunto de regras de manipulação de formas lógicas; se fizermos isto bem, teremos um instrumento de grande alcance, que poderá demonstrar, para toda a forma argumentativa, se esta é válida ou inválida.

Estas regras de manipulação de formas lógicas não são arbitrárias; podemos ver que são válidas usando inspetores de circunstâncias. Por exemplo, uma das regras que vamos usar é a seguinte: sempre que encontrarmos uma forma como  $P \rightarrow Q$ , podemos transformá-la em  $\neg Q \vee P$ . Ou seja, na verdade estamos a dizer que podemos concluir a segunda com base na primeira. E um inspetor de circunstâncias mostra que a forma argumentativa  $P \rightarrow Q \models \neg Q \vee P$  é válida.

Vamos estudar dois métodos sintáticos de demonstração. O primeiro é mais fácil, muito mais fácil, e serve de preparação para o segundo. Ao primeiro chamaremos *árvores lógicas* e ao segundo *derivações*. A diferença crucial entre ambos será depois assinalada. Para já, vamos então apresentar o primeiro.

## Validade, inconsistência e redução ao absurdo

Um aspecto curioso acerca de qualquer argumento válido é que se negarmos a sua conclusão geramos um conjunto inconsistente de proposições. Tome-se, por exemplo, o seguinte argumento:

Se a justiça é uma mera ficção, não tem qualquer vantagem real sobre a injustiça.  
 Mas a justiça tem vantagens reais sobre a injustiça.  
 Logo, a justiça não é uma mera ficção.

A sua forma lógica é o *modus tollens*:

$P \rightarrow \neg Q$   
 $Q$   
 $\therefore \neg P$

Evidentemente, se fizermos um inspetor de circunstâncias, verificamos que esta forma argumentativa é válida. O que é curioso é que se negarmos a sua conclusão obtemos um conjunto inconsistente de proposições.

- Um conjunto de proposições é inconsistente quando não há qualquer circunstância em que todas as proposições sejam verdadeiras.

P	Q	$P \rightarrow \neg Q$	Q	P
V	V	F	V	V
V	F	V	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	F

Este aspecto é evidente: se num argumento válido não há qualquer circunstância em que as suas premissas sejam verdadeiras e a sua conclusão falsa, ao negar a sua conclusão ficamos sem qualquer circunstância em que as suas premissas sejam verdadeiras e a sua conclusão seja também verdadeira. E portanto ficamos sem qualquer circunstância em que todas as proposições do argumento sejam verdadeiras.

Este aspecto da argumentação válida é usado numa forma argumentativa chamada *redução ao absurdo* (*reductio ad absurdum*). Numa redução ao absurdo negamos a conclusão que queremos provar e derivamos daí uma inconsistência; se conseguirmos fazer isto, mostramos que o argumento com a conclusão original, antes de a termos negado, era válido – era válido porque só quando

um argumento é válido a negação da sua conclusão dá origem a uma inconsistência.

Na vida cotidiana usamos por vezes variações desta forma de argumentação. Por exemplo, uma pessoa afirma algo. Nós queremos mostrar o contrário. E o que fazemos? Aceitamos a sua afirmação, e mostramos que dela se segue uma inconsistência qualquer. Por exemplo:

- Nada existe.
- Hum... tens a certeza? Admitamos que nada existe. Nesse caso, nada disseste mesmo agora. Mas é óbvio que admites que disseste algo mesmo agora. Portanto, se nada existe, segue-se que disseste e não disseste algo mesmo agora. Mas isto é absurdo. Logo, é falso que nada exista.

Assim, no nosso método de demonstração, vamos transformar qualquer forma argumentativa do seguinte modo: às premissas dadas, acrescentamos a negação da conclusão. Se daqui resultar uma inconsistência, a forma argumentativa original era válida; se não, a forma argumentativa válida não era válida.

## Árvores lógicas

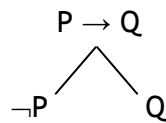
As árvores de demonstração já receberam vários nomes. Começaram por se chamar *tableaux*, em inglês.<sup>1</sup> Esta palavra inglesa vem do francês antigo para imagem. Depois começou-se a usar em inglês uma ortografia simplificada: *tableau*. Em ambos os casos, usava-se o qualificativo “semantic,” ficando-se com *semantic tableau*. Isto foi traduzido por “árvores semânticas,” porque também se começou a falar em inglês de *semantic trees*. Contudo, confunde as coisas falar de árvores semânticas, pois num certo sentido não são semânticas, mas antes sintáticas. Por isso, usa-se hoje habitualmente o termo *logic trees*, que se pode traduzir por “árvores lógicas” ou *tree proofs* (demonstrações em árvore).

O primeiro aspecto das árvores lógicas, é que se trata de um método que procede por redução ao absurdo. Por isso, vamos sempre juntar a negação da conclusão em causa às premissas do argumento e tentar chegar a uma inconsistência. Se conseguirmos fazer isso sem errar, demonstramos a validade da forma argumentativa original. Caso contrário, demonstramos a sua invalidade (caso não nos tenhamos enganado).

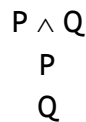
<sup>1</sup> Apesar de terem sido sugeridas pela primeira vez por um lógico holandês, Evert W. Beth (1908-64), as árvores lógicas só se tornaram mais conhecidas com o trabalho do norte-americano Raymond M. Smullyan.

O segundo aspecto das árvores lógicas é proceder sempre por simplificação de fórmulas. Perante qualquer fórmula em qualquer momento da nossa demonstração, só há uma maneira correta de a simplificar. E continuamos a fazer este trabalho de simplificação até 1) chegar a uma inconsistência ou 2) não haver mais fórmulas complexas que possam ser simplificadas.

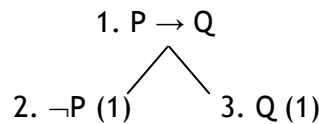
O terceiro aspecto das árvores lógicas é que estas representam graficamente as disjunções e as conjunções – e é por isso que dão origem a coisas parecidas com árvores (com ramos e um tronco principal). Por exemplo, a simplificação da forma lógica  $P \rightarrow Q$  é  $\neg P \vee Q$ , mas representaremos isso graficamente fazendo dois ramos:



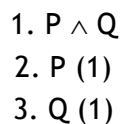
Quando a simplificação é uma conjunção, limitamo-nos a colocar a forma lógica por debaixo da outra. Por exemplo, a simplificação da conjunção é feita assim:



Para nos orientarmos, vamos numerar as fórmulas e chamar passos a cada um dos casos:



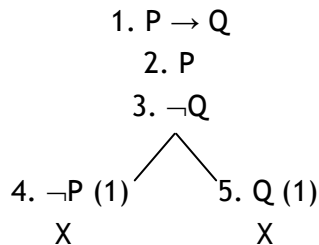
Os números com o ponto (1., 2., 3.) numeram os passos do raciocínio. Os números entre parênteses dizem-nos de onde resulta a forma em causa. Fazendo o mesmo ao segundo exemplo, obtemos o seguinte:



Façamos agora uma árvore que demonstra a validade do *modus ponens*:

$P \rightarrow Q$   
 $P$   
 $\therefore Q$

Começamos por juntar a negação da conclusão às premissas, e depois simplificamos a única forma complexa que temos; o resultado é o seguinte:



Se olharmos com atenção para a forma do passo 4, vemos que ela nega a forma do passo 2: uma é a negação da outra. Chegamos por isso a uma inconsistência e assinalamos isso com uma cruz. E o mesmo ocorre com a forma do passo 5: também é inconsistente com uma forma anterior, mas neste caso a forma do passo 3.

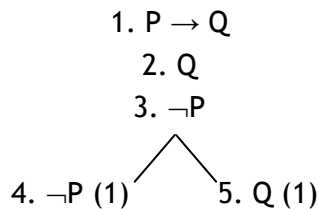
Quando em todos os ramos de uma árvore temos uma inconsistência, fechamos o ramo com a cruz. Quando todos os ramos fecham, a forma argumentativa original era válida; quando pelo menos um ramo não fecha, a forma original não era válida.

Vejamos o que acontece com a falácia da afirmação da consequente:

**Forma argumentativa**

$P \rightarrow Q$   
 $Q$   
 $\therefore P$

**Árvore lógica**



Agora, nenhum dos ramos fechou. E como não temos mais formas complexas para simplificar, demonstramos que a forma original era inválida. Seria inválida

mesmo que um dos ramos fechasse, pois basta um ramo ficar aberto para ficar demonstrada a invalidade.