

Lógica II (FIL 125)

Universidade Federal de Ouro Preto

Professor Desidério Murcho

Lógica Modal Proposicional

Regras Primitivas

Eliminação K da necessidade (EK \square)

Prem	1.	$\square A$	
Sup	2.	A	(E \square)
	⋮		
2	4.	C	...
1	5.	$\square C$	1, 2-4 E \square

Eliminação K da possibilidade (EK \diamond)

Prem	1.	$\diamond A$	
Sup	2.	A	(E \diamond)
	⋮		
2	4.	C	...
1	5.	$\diamond C$	1, 2-4 E \diamond

Introdução K da necessidade (IK \square)

1	1.	A	
	2.	$\square A$	1, IK \square

Introdução T da possibilidade (IT \diamond)

Prem	1.	A	
1	2.	$\diamond A$	

Eliminação T da necessidade (ET \square)

Prem	1.	$\square A$	
1	2.	A	1, I \square

Introdução B da necessidade (IB \square)

Prem	1.	A	
1	2.	$\square \diamond A$	1, IB \square

Eliminação B da possibilidade (EB \diamond)

Prem	1.	$\diamond \square A$	
1	2.	A	1, EB \diamond

Introdução S4 da necessidade (IS4 \square)

Prem	1.	$\square A$	
1	2.	$\square \square A$	1, IS4 \square

Eliminação S4 da possibilidade (ES4 \diamond)

Prem	1.	$\diamond \diamond A$	
1	2.	$\diamond A$	1, ES4 \diamond

Introdução S5 da necessidade (IS5 \square)

Prem	1.	$\diamond A$	
1	2.	$\square \diamond A$	1, IS5 \square

Eliminação S5 da possibilidade (ES5 \diamond)

Prem	1.	$\diamond \square A$	
1	2.	$\square A$	1, ES5 \diamond

Regras Derivadas

Regras de equivalência (K)

1. $\square A \equiv \neg \diamond \neg A$ (Definição de necessidade)
2. $\diamond A \equiv \neg \square \neg A$ (Definição de possibilidade)
3. $\neg \square A \equiv \diamond \neg A$ (Negação da necessidade)
4. $\neg \diamond A \equiv \square \neg A$ (Negação da possibilidade)

Regras de implicação (K)

5. $\square(A \rightarrow B), \square A \vdash \square B$ (MP \square)
6. $\square(A \rightarrow B), \diamond A \vdash \diamond B$ (MP \diamond)
7. $\square(A \rightarrow B), \square \neg B \vdash \square \neg A$ (MT \square)
8. $\square(A \rightarrow B), \diamond \neg B \vdash \diamond \neg A$ (MT \diamond)

Nota: Para efeitos de redução ao absurdo, há três tipos de contradições: $A \wedge \neg A$, $\diamond(A \wedge \neg A)$ e $\square(A \wedge \neg A)$.

Lógica II (FIL 125)

Universidade Federal de Ouro Preto

Professor Desidério Murcho

Lógica Proposicional Clássica

Regras Primitivas

Introdução da conjunção ($I\wedge$)

Prem 1. A
 Prem 2. B
 1,2 3. $A \wedge B$ 1,2 $I\wedge$

Ou:

1,2 3. $B \wedge A$ 1,2 $I\wedge$

Eliminação da conjunção ($E\wedge$)

Prem 1. $A \wedge B$
 1 2. A 1 $E\wedge$

Ou:

1 2. B 1 $E\wedge$

Introdução da condicional ($I\rightarrow$)

Sup 1. A
 ⋮
 1 3. B
 4. $A \rightarrow B$ 1-3 $I\rightarrow$

Nota: No passo 4 elimina-se a dependência da Suposição 1.

Eliminação da condicional ($E\rightarrow$) (Modus Ponens)

Prem 1. $A \rightarrow B$
 Prem 2. A
 1,2 3. B 1,2 $E\rightarrow$

Introdução da disjunção ($I\vee$)

Prem 1. A
 1 2. $A \vee B$ 1 $I\vee$

Eliminação da disjunção ($E\vee$) (Dilema construtivo simples)

Prem 1. $A \vee B$

Sup 2. A
 ⋮
 2 4. C

Sup 5. B
 ⋮
 5 7. C

1 8. C 1, 2-4, 5-7 $E\vee$

Nota: O passo 8 depende de todas as premissas e suposições de que dependerem os passos 1, 4 e 7, excepto das suposições 2 e 5, que são eliminadas.

Introdução da negação ($I\neg$) (Reductio ad absurdum)

Sup 1. A
 ⋮
 1 3. $B \wedge \neg B$
 4. $\neg A$ 1-3 $I\neg$

Nota: No passo 4 elimina-se a dependência da Suposição 1.

Eliminação da negação ($E\neg$) (Dupla negação)

Prem 1. $\neg\neg A$
 1 2. A 1 $E\neg$

Introdução da bicondicional ($I\rightleftharpoons$)

Prem 1. $A \rightarrow B$
 Prem 2. $B \rightarrow A$
 1,2 3. $A \rightleftharpoons B$ 1,2 $I\rightleftharpoons$

Eliminação da bicondicional ($E\rightleftharpoons$)

Prem 1. $A \rightleftharpoons B$
 1 2. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 1 $E\rightleftharpoons$

Lógica II (FIL 125)
Universidade Federal de Ouro Preto
Professor Desidério Murcho

Lógica Proposicional

REGRAS DERIVADAS

Regras de equivalência

1. $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ (Condicional)
2. $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$ (Contraposição)
3. $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$ (Negação da condicional)
4. $A \Leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ (Bicondicional)
5. $A \Leftrightarrow B \equiv \neg A \Leftrightarrow \neg B$ (Equivalência)
6. $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$ (Negação da bicondicional)

7. $A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B$ (Disjunção)
8. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (De Morgan)
9. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (Distributividade)
10. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (Associatividade)
11. $A \equiv A \vee A$ (Idempotência)

12. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (De Morgan)
13. $\neg(A \wedge \neg B) \equiv A \rightarrow B$ (Negação da conjunção)
14. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (Distributividade)
15. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ (Associatividade)
16. $A \equiv A \wedge A$ (Idempotência)

Regras de Implicação

17. $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$ (*Modus tollens*)
18. $A \vee B, \neg A \vdash B$ (Silogismo disjuntivo)
19. $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$ (Silogismo hipotético)
20. $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow D \vdash C \vee D$ (Dilema construtivo)
21. $A \vdash \neg\neg A$ (Dupla negação)

22. $A \wedge \neg A \vdash B$ (*Falsum*)
23. $A \vdash B \vee \neg B$ (*Verum*)

Dependências: A conclusão depende da premissa ou premissas de que depende a fórmula a que se aplica a regra, ou da própria fórmula, no caso de esta ser uma premissa. Excepto 22 e 23, que não dependem de quaisquer premissas.