

Universidade Federal de Ouro Preto
DEDUÇÃO NATURAL PROPOSICIONAL
REGRAS PRIMITIVAS

Introdução da conjunção ($I\wedge$)

Prem	1.	A		
Prem	2.	B		
1,2	3.	$A \wedge B$	1,2	$I\wedge$
Ou:				
1,2	3.	$B \wedge A$	1,2	$I\wedge$

Eliminação da conjunção ($E\wedge$)

Prem	1.	$A \wedge B$		
1	2.	A	1	$E\wedge$
Ou:				
1	2.	B	1	$E\wedge$

Introdução da condicional ($I\rightarrow$)

Sup	1.	A		
	⋮	⋮		
1	3.	B		
	4.	$A \rightarrow B$	1-3	$I\rightarrow$

(No passo 4 elimina-se a dependência da suposição 1.)

Eliminação da condicional ($E\rightarrow$)

(*Modus Ponens*)

Prem	1.	$A \rightarrow B$		
Prem	2.	A		
1,2	3.	B	1,2	$E\rightarrow$

Introdução da disjunção ($I\vee$)

Prem	1.	A		
1	2.	$A \vee B$	1	$I\vee$

Eliminação da disjunção ($E\vee$)

(Dilema construtivo simples)

Prem	1.	$A \vee B$		
Sup	2.	A		
	⋮	⋮		
2	4.	C		
Sup	5.	B		
	⋮	⋮		
5	7.	C		
1	8.	C	1, 2-4, 5-7	$E\vee$

(O passo 8 depende de tudo o que depender 1, 4 e 7, exceto das suposições, que são eliminadas.)

Introdução da negação ($I\neg$)

(*Reductio ad absurdum*)

Sup	1.	A		
	⋮	⋮		
1	3.	$B \wedge \neg B$		
	4.	$\neg A$	1-3	$I\neg$

(No passo 4 elimina-se a dependência da suposição 1.)

Eliminação da negação ($E\neg$)

(Dupla negação)

Prem	1.	$\neg \neg A$		
1	2.	A	1	$E\neg$

Introdução da bicondicional ($I\leftrightarrow$)

Prem	1.	$A \rightarrow B$		
Prem	2.	$B \rightarrow A$		
1,2	3.	$A \leftrightarrow B$	1,2	$I\leftrightarrow$

Eliminação da bicondicional ($E\leftrightarrow$)

Prem	1.	$A \leftrightarrow B$		
1	2.	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	1	$E\leftrightarrow$

Universidade Federal de Ouro Preto
DEDUÇÃO NATURAL PROPOSICIONAL
REGRAS DERIVADAS

Regras de equivalência

1. $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ (Condicional)
2. $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$ (Contraposição)
3. $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$ (Negação da condicional)
4. $A \rightleftarrows B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ (Bicondicional)
5. $A \rightleftarrows B \equiv \neg A \rightleftarrows \neg B$ (Equivalência)
6. $\neg(A \rightleftarrows B) \equiv (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$ (Negação da bicondicional)

7. $A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B$ (Disjunção)
8. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (De Morgan)
9. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (Distributividade)
10. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (Associatividade)
11. $A \equiv A \vee A$ (Idempotência)

12. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (De Morgan)
13. $\neg(A \wedge \neg B) \equiv A \rightarrow B$ (Negação da conjunção)
14. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (Distributividade)
15. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ (Associatividade)
16. $A \equiv A \wedge A$ (Idempotência)

Regras de Implicação

17. $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$ (*Modus tollens*)
18. $A \vee B, \neg A \vdash B$ (Silogismo disjuntivo)
19. $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$ (Silogismo hipotético)
20. $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow D \vdash C \vee D$ (Dilema construtivo)
21. $A \vdash \neg\neg A$ (Dupla negação)

22. $A \wedge \neg A \vdash B$ (*Falsum*)
23. $A \vdash B \vee \neg B$ (*Verum*)

Dependências: A conclusão depende da premissa ou premissas de que depende a fórmula a que se aplica a regra, ou da própria fórmula, no caso de esta ser uma premissa. **Exceto 23**, que não depende de quaisquer premissas.