

# Linguagem modal proposicional

## Desidério Murcho

Departamento de Filosofia, Universidade Federal de Ouro Preto

Recordemos os aspectos centrais da lógica proposicional clássica, para compreendermos depois melhor a linguagem modal proposicional.

A lógica proposicional clássica estuda os argumentos cuja validade ou invalidade depende exclusivamente de cinco operadores proposicionais:  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  e  $\neg$ . Como vimos, estes operadores são verofuncionais, e é porque são verofuncionais que pudemos usar em Lógica I inspetores de circunstâncias.

Vimos também que a lógica proposicional clássica não dá conta de todas as validades proposicionais; só dá conta das validades proposicionais que dependem exclusivamente dos aspectos verofuncionais dos argumentos. Por exemplo, o seguinte argumento proposicional é válido, mas não é válido em função de aspectos verofuncionais:

O Asdrúbal sabe que Sócrates era grego.  
Logo, Sócrates era grego.

A validade deste argumento depende crucialmente do operador de conhecimento ( $x$  sabe que  $P$ ). Mudando o operador para o operador de crença ( $x$  acredita que  $P$ ), obtemos um argumento inválido:

O Asdrúbal acredita que Wittgenstein era alemão.  
Logo, Wittgenstein era alemão.

A lógica clássica não pode dar conta da diferença de validade entre estes dois argumentos porque essa diferença resulta da diferença existente entre o operador de conhecimento e o operador de crença, e nenhum dos dois é verofuncional. (*Exercício: demonstre que nenhum dos dois operadores é verofuncional.*)

O mesmo acontece com argumentos que usem operadores modais; a lógica clássica não dá conta da validade nem da invalidade destes argumentos, pois tais operadores não são verofuncionais. Vejamos dois exemplos:

Sócrates era **necessariamente** um ser humano.  
Logo, Sócrates era um ser humano.

Sócrates era **possivelmente** egípcio.  
Logo, Sócrates era egípcio.

Evidentemente, o primeiro argumento é válido: é impossível a premissa ser verdadeira e a conclusão falsa. E o segundo argumento é evidentemente inválido, pois apesar de ser verdade que Sócrates poderia ter sido egípcio, se os seus pais tivessem imigrado para o Egito, ele não era de fato egípcio.

Nestes dois argumentos estão em causa os dois operadores modais centrais: “necessariamente” e “possivelmente”. Intuitivamente todos compreendemos o que querem dizer estes operadores. Algo é necessário quando, além de ser verdade, não poderia não ter sido verdade. E algo é possível quando pode ser verdade, mas não tem de ser verdade.

Os símbolos de necessidade e possibilidade são respectivamente os seguintes:  $\Box$  e  $\Diamond$ . Sintaticamente, estes operadores são como o operador de negação: operam apenas sobre uma proposição, simples ou complexa, e regem-se pelas mesmas regras sintáticas. Assim, as seguintes formas lógicas são bastante diferentes:

- $\Box P \rightarrow Q$ : Se Deus existe necessariamente, a vida tem sentido.
- $\Box(P \rightarrow Q)$ : Necessariamente, se Deus existe, a vida tem sentido.

A primeira é uma condicional cuja antecedente é uma afirmação necessária. A segunda é uma condicional necessária. As suas condições de verdade são inteiramente diferentes, como veremos. Para já, basta compreender que o âmbito dos operadores modais é determinado do mesmo modo que o âmbito do operador de negação.

Os operadores de necessidade e de possibilidade não são verofuncionais. Vejamos porquê. Consideremos primeiro a negação, que é verofuncional. É verofuncional porque podemos não saber o valor de verdade de uma proposição  $P$ , mas sabemos mesmo assim que se  $P$  for verdadeira,  $\neg P$  será falsa; e se  $P$  for falsa,  $\neg P$  será verdadeira. Ora, se não soubermos o valor de verdade de  $P$ , não saberemos qual é o valor de verdade de  $\Box P$ ; sabemos apenas que se  $P$  for falsa,  $\Box P$  será falsa; mas se  $P$  for verdadeira,  $\Box P$  tanto pode ser verdadeira como falsa. Por exemplo, é falso que Sócrates era um chinelo de quarto, e por isso sabemos que é falso que ele era necessariamente um chinelo de quarto. Mas é verdade que Sócrates era um ser humano e contudo daqui não se segue logicamente apenas que ele era necessariamente um ser humano. Logo, o operador de necessidade não é verofuncional. (*Exercício*: Demonstre que o operador de possibilidade não é verofuncional.)

A lógica modal proposicional estuda os argumentos cuja validade ou invalidade depende do uso dos dois operadores modais, em contextos proposicionais. Intuitivamente, as seguintes formas argumentativas modais são válidas:

$$\begin{aligned} P &\models \Diamond P \\ \Box P &\models \Diamond P \\ \Box P &\models P \end{aligned}$$

E as seguintes são intuitivamente inválidas:

$$\begin{aligned} P &\not\models \Box P \\ \Diamond P &\not\models \Box P \\ \Diamond P &\not\models P \end{aligned}$$

Os operadores modais relacionam-se com a negação como os quantificadores:

$$\begin{aligned} \neg \Diamond P &\equiv \Box \neg P \\ \neg \Box P &\equiv \Diamond \neg P \end{aligned}$$

Daqui segue-se que a necessidade pode ser definida em termos da negação da possibilidade e vice-versa:

$$\begin{aligned} \Box P &\equiv \neg \Diamond \neg P \\ \Diamond P &\equiv \neg \Box \neg P \end{aligned}$$

Assim, uma proposição é necessariamente verdadeira quando não poderia ser falsa; e uma proposição é possivelmente verdadeira quando não é necessariamente falsa.

A contingência é apenas uma conjunção de possibilidades: uma proposição é contingentemente verdadeira quando além de ser verdadeira poderia ter sido falsa. Usando o símbolo  $\nabla$  para a contingência, a sua definição é a seguinte:

$$\nabla P \equiv P \wedge \Diamond \neg P$$

Assim, é defensável que é incoerente celebrar simultaneamente a contingência humana e a inexistência da verdade, dado que só com o conceito de verdade é possível definir o conceito de contingência.

Tal como acontece com o operador de negação, também os operadores modais podem ser reiterados:  $\Diamond \Diamond P$  representa correctamente uma forma lógica, assim como  $\Box \Box P$  ou  $\Diamond \Box \Diamond \Box \Diamond \Diamond P$ . Como veremos mais tarde, a **reiteração misturada** de operadores modais é fundamental para a compreensão da lógica modal.

Para já, basta compreender intuitivamente a diferença intuitiva de algumas misturas simples entre os operadores modais e o operador de negação, assim como os outros operadores proposicionais. Vejamos alguns exemplos:

- 1) Sócrates não é necessariamente ateniense:  $\neg \Box P$ .
- 2) Não é necessário que Sócrates seja ateniense:  $\neg \Box P$ .
- 3) Necessariamente, Sócrates não é ateniense:  $\Box \neg P$ .
- 4) Sócrates é necessariamente ateniense:  $\Box P$ .
- 5) Necessariamente, Sócrates é ateniense:  $\Box P$ .

*Exercícios:* sendo P “Sócrates é ateniense” formalize as seguintes afirmações:

- 6) Sócrates não é possivelmente ateniense:
- 7) Não é possível que Sócrates seja ateniense:
- 8) Possivelmente, Sócrates não é ateniense:
- 9) Sócrates é possivelmente ateniense:
- 10) Possivelmente, Sócrates é ateniense:

Há outros modos de exprimir possibilidades e necessidades: “Sócrates tem de ser ateniense” é o mesmo que “Sócrates é necessariamente ateniense”; e “Sócrates pode ser ateniense” é o mesmo que “Sócrates é possivelmente ateniense”. O “pode” e o “ter de” são maneiras diferentes de exprimir os mesmos dois operadores de possibilidade e necessidade.

*Exercícios:* Formalize as seguintes afirmações, sendo P “Sócrates é ateniense”:

- 11) Sócrates não tem de ser ateniense:
- 12) Sócrates tem de ser ateniense:
- 13) Sócrates não pode ser ateniense:
- 14) Sócrates pode ser ateniense:

Tal como os operadores modais podem misturar-se com o operador de negação, podem também misturar-se com os restantes operadores.

*Exercícios:* Sendo P “Deus existe” e Q “A vida tem sentido”, exprima em português as seguintes formas proposicionais:

- 15)  $P \rightarrow \Box Q$ :
- 16)  $\Box P \rightarrow Q$ :
- 17)  $\Box(P \rightarrow Q)$ :
- 18)  $P \vee \Diamond Q$ :
- 19)  $\Diamond P \vee Q$ :
- 20)  $\Diamond(P \vee Q)$ :
- 21)  $P \wedge \Diamond Q$ :
- 22)  $\Diamond P \wedge Q$ :
- 23)  $\Diamond(P \wedge Q)$ :
- 24)  $\neg P \Leftrightarrow \Box \neg Q$ :

25)  $\neg P \Leftrightarrow \neg \Box Q$ :

26)  $\Box(\neg P \Leftrightarrow \neg \Box Q)$ :

*Exercícios:* Sendo P “O universo é determinado” e Q “O livre-arbítrio é uma ilusão”, formalize as proposições expressas a seguir, assinalando as ambigüidades que encontrar:

- 27) Se o universo é determinado, então o livre-arbítrio é necessariamente uma ilusão:
- 28) Necessariamente, se o universo é determinado, então o livre-arbítrio é uma ilusão:
- 29) Se o universo é necessariamente determinado, então o livre-arbítrio é uma ilusão:
- 30) É necessário que o universo seja determinado e o livre-arbítrio uma ilusão:
- 31) É necessário que o universo seja determinado e que o livre-arbítrio seja uma ilusão:
- 32) Não é necessário que o universo seja determinado e o livre-arbítrio uma ilusão:
- 33) É possível que o universo seja determinado e que o livre-arbítrio não seja uma ilusão:
- 34) Se for possível que o livre-arbítrio é uma ilusão, então não é necessário que o universo não seja determinado:
- 35) Se não for impossível que o livre-arbítrio é uma ilusão, então não é necessário que o universo não seja determinado:
- 36) Ou é possível que o universo seja determinado ou é impossível que o livre-arbítrio seja uma ilusão:
- 37) Possivelmente, é necessário que o universo ser determinado seja possível: