Linguagem modal proposicional

Desidério Murcho

Departamento de Filosofia, Universidade Federal de Ouro Preto

Recordemos os aspectos centrais da lógica proposicional clássica, para compreendermos depois melhor a linguagem modal proposicional.

A lógica proposicional clássica estuda os argumentos cuja validade ou invalidade depende exclusivamente de cinco operadores proposicionais: $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\rightleftarrows$ e $\neg$. Como vimos, estes operadores são verofuncionais, e é porque são verofuncionais que pudemos usar em Lógica I inspetores de circunstâncias.

Vimos também que a lógica proposicional clássica não dá conta de todas as validades proposicionais; só dá conta das validades proposicionais que dependem exclusivamente dos aspectos verofuncionais dos argumentos. Por exemplo, o seguinte argumento proposicional é válido, mas não é válido em função de aspectos verofuncionais:

> O Asdrúbal sabe que Sócrates era grego.
> Logo, Sócrates era grego.

A validade deste argumento depende crucialmente do operador de conhecimento (*x* sabe que P). Mudando o operador para o operador de crença (*x* acredita que P), obtemos um argumento inválido:

> O Asdrúbal acredita que Wittgenstein era alemão.
> Logo, Wittgenstein era alemão.

A lógica clássica não pode dar conta da diferença de validade entre estes dois argumentos porque essa diferença resulta da diferença existente entre o operador de conhecimento e o operador de crença, e nenhum dos dois é verofuncional. (*Exercício:* demonstre que nenhum dos dois operadores é verofuncional.)

O mesmo acontece com argumentos que usem operadores modais; a lógica clássica não dá conta da validade nem da invalidade destes argumentos, pois tais operadores não são verofuncionais. Vejamos dois exemplos:

> Sócrates era **necessariamente** um ser humano.
> Logo, Sócrates era um ser humano.

Sócrates era **possivelmente** egípcio.
Logo, Sócrates era egípcio.

Evidentemente, o primeiro argumento é válido: é impossível a premissa ser verdadeira e a conclusão falsa. E o segundo argumento é evidentemente inválido, pois apesar de ser verdade que Sócrates poderia ter sido egípcio, se os seus pais tivessem imigrado para o Egito, ele não era de fato egípcio.

Nestes dois argumentos estão em causa os dois operadores modais centrais: "necessariamente" e "possivelmente". Intuitivamente todos compreendemos o que querem dizer estes operadores. Algo é necessário quando, além de ser verdade, não poderia não ter sido verdade. E algo é possível quando pode ser verdade, mas não tem de ser verdade.

Os símbolos de necessidade e possibilidade são respectivamente os seguintes: $\Box$ e $\Diamond$. Sintaticamente, estes operadores são como o operador de negação: operam apenas sobre uma proposição, simples ou complexa, e regem-se pelas mesmas regras sintáticas. Assim, as seguintes formas lógicas são bastante diferentes:

$\Box P \rightarrow Q$: Se Deus existe necessariamente, a vida tem sentido.
$\Box(P \rightarrow Q)$: Necessariamente, se Deus existe, a vida tem sentido.

A primeira é uma condicional cuja antecedente é uma afirmação necessária. A segunda é uma condicional necessária. As suas condições de verdade são inteiramente diferentes, como veremos. Para já, basta compreender que o âmbito dos operadores modais é determinado do mesmo modo que o âmbito do operador de negação.

Os operadores de necessidade e de possibilidade não são verofuncionais. Vejamos porquê. Consideremos primeiro a negação, que é verofuncional. É verofuncional porque podemos não saber o valor de verdade de uma proposição P, mas sabemos mesmo assim que se P for verdadeira, $\neg P$ será falsa; e se P for falsa, $\neg P$ será verdadeira. Ora, se não soubermos o valor de verdade de P, não saberemos qual é o valor de verdade de $\Box P$; sabemos apenas que se P for falsa, $\Box P$ será falsa; mas se P for verdadeira, $\Box P$ tanto pode ser verdadeira como falsa. Por exemplo, é falso que Sócrates era um chinelo de quarto, e por isso sabemos que é falso que ele era necessariamente um chinelo de quarto. Mas é verdade que Sócrates era um ser humano e contudo daqui não se segue logicamente apenas que ele era necessariamente um ser humano. Logo, o operador de necessidade não é verofuncional. (*Exercício:* Demonstre que o operador de possibilidade não é verofuncional.)

A lógica modal proposicional estuda os argumentos cuja validade ou invalidade depende do uso dos dois operadores modais, em contextos proposicionais. Intuitivamente, as seguintes formas argumentativas modais são válidas:

$P \vDash \Diamond P$
$\Box P \vDash \Diamond P$
$\Box P \vDash P$

E as seguintes são intuitivamente inválidas:

$P \nvDash \Box P$
$\Diamond P \nvDash \Box P$
$\Diamond P \nvDash P$

Os operadores modais relacionam-se com a negação como os quantificadores:

$\neg\Diamond P \equiv \Box\neg P$
$\neg\Box P \equiv \Diamond\neg P$

Daqui segue-se que a necessidade pode ser definida em termos da negação da possibilidade e vice-versa:

$\Box P \equiv \neg\Diamond\neg P$
$\Diamond P \equiv \neg\Box\neg P$

Assim, uma proposição é necessariamente verdadeira quando não poderia ser falsa; e uma proposição é possivelmente verdadeira quando não é necessariamente falsa.

A contingência é apenas uma conjunção de possibilidades: uma proposição é contingente quando é possível que seja verdadeira e também é possível que seja falsa. Usando o símbolo $\triangledown$ para a contingência, a sua definição é a seguinte:

$\triangledown P \equiv \Diamond P \wedge \Diamond\neg P$

Assim, é defensável que é incoerente celebrar simultaneamente a contingência humana e a inexistência da verdade, dado que só com o conceito de verdade é possível definir o conceito de contingência.

Há uma diferença sutil entre a definição de contingência, que é a dada acima, e a definição de verdade contingente. Uma verdade é contingente se, e só se, é verdadeira mas poderia ter sido falsa.

Tal como acontece com o operador de negação, também os operadores modais podem ser reiterados: $\Diamond\Diamond P$ representa corretamente uma forma lógica, assim como $\Box\Box P$ ou $\Diamond\Box\Diamond\Box\Diamond\Box\Diamond\Diamond P$. Como veremos mais tarde, a **reiteração misturada** de operadores modais é fundamental para a compreensão da lógica modal.

Para já, basta compreender intuitivamente a diferença de algumas misturas simples entre os operadores modais e o operador de negação, assim como os outros operadores proposicionais. Vejamos alguns exemplos:

1) Sócrates não é necessariamente ateniense: $\neg\Box P$.
2) Não é necessário que Sócrates seja ateniense: $\neg\Box P$.
3) Necessariamente, Sócrates não é ateniense: $\Box\neg P$.
4) Sócrates é necessariamente ateniense: $\Box P$.
5) Necessariamente, Sócrates é ateniense: $\Box P$.

Exercícios: sendo P "Sócrates é ateniense" formalize as seguintes afirmações:

6) Sócrates não é possivelmente ateniense:
7) Não é possível que Sócrates seja ateniense:
8) Possivelmente, Sócrates não é ateniense:
9) Sócrates é possivelmente ateniense:
10) Possivelmente, Sócrates é ateniense:

Há outros modos de exprimir possibilidades e necessidades: "Sócrates tem de ser ateniense" é o mesmo que "Sócrates é necessariamente ateniense"; e "Sócrates pode ser ateniense" é o mesmo que "Sócrates é possivelmente ateniense". O "pode" e o "ter de" são maneiras diferentes de exprimir os mesmos dois operadores de possibilidade e necessidade.

Exercícios: Formalize as seguintes afirmações, sendo P "Sócrates é ateniense":

11) Sócrates não tem de ser ateniense:
12) Sócrates tem de ser ateniense:
13) Sócrates não pode ser ateniense:
14) Sócrates pode ser ateniense:

Tal como os operadores modais podem misturar-se com o operador de negação, podem também misturar-se com os restantes operadores.

Exercícios: Sendo P "Deus existe" e Q "A vida tem sentido", exprima em português as seguintes formas proposicionais:

15) $P \rightarrow \Box Q$:
16) $\Box P \rightarrow Q$:
17) $\Box(P \rightarrow Q)$:
18) $P \vee \Diamond Q$:
19) $\Diamond P \vee Q$:

20) $\Diamond(P \lor Q)$:
21) $P \land \Diamond Q$:
22) $\Diamond P \land Q$:
23) $\Diamond(P \land Q)$:
24) $\neg P \rightleftarrows \Box\neg Q$:
25) $\neg P \rightleftarrows \neg\Box Q$:
26) $\Box(\neg P \rightleftarrows \neg\Box Q)$:

Exercícios: Sendo P “O universo é determinado” e Q “O livre-arbítrio é uma ilusão”, formalize as proposições expressas a seguir, assinalando as ambigüidades que encontrar:

27) Se o universo é determinado, então o livre-arbítrio é necessariamente uma ilusão:
28) Necessariamente, se o universo é determinado, então o livre-arbítrio é uma ilusão:
29) Se o universo é necessariamente determinado, então o livre-arbítrio é uma ilusão:
30) É necessário que o universo seja determinado e o livre-arbítrio uma ilusão:
31) É necessário que o universo seja determinado e que o livre-arbítrio seja uma ilusão:
32) Não é necessário que o universo seja determinado e o livre-arbítrio uma ilusão:
33) É possível que o universo seja determinado e que o livre-arbítrio não seja uma ilusão:
34) Se for possível que o livre-arbítrio é uma ilusão, então não é necessário que o universo não seja determinado:
35) Se não for impossível que o livre-arbítrio é uma ilusão, então não é necessário que o universo não seja determinado:
36) Ou é possível que o universo seja determinado ou é impossível que o livre-arbítrio seja uma ilusão:
37) Possivelmente, é necessário que o universo ser determinado seja possível: