Introdução à lógica formal

Desidério Murcho
Universidade Federal de Ouro Preto

1. Forma lógica

Na lógica formal estuda-se apenas um tipo de validade dedutiva. Estuda-se apenas aquele tipo de validade dedutiva que podemos determinar recorrendo unicamente à forma lógica**.** É por isso que se chama "formal" à lógica formal. Mas o que é a forma lógica?

Não há uma definição explícita de forma lógica que seja simultaneamente rigorosa e informativa. Mas é fácil compreender o que é a forma lógica através de exemplos:

> Platão é o autor da *República* e Aristóteles da *Metafísica*.
> Logo, Platão é o autor da *República*.

> Halo 3 é um jogo muito bom e a Internet é muito útil.
> Logo, Halo 3 é um jogo muito bom.

Num certo sentido, estes dois argumentos são muito diferentes: um é sobre filósofos gregos, e o outro é sobre um jogo e a Internet. Os argumentos são diferentes no sentido em que têm conteúdos diferentes; versam sobre assuntos diferentes.

Noutro sentido, contudo, podemos ver que os dois argumentos são semelhantes. Nos dois casos, a premissa afirma duas coisas e a conclusão repete uma delas. Isso torna-se visível se usarmos espaços vazios para a primeira e segunda dessas coisas:

> ___ e ....
> Logo, ___.

É a este tipo de estrutura que se chama "forma lógica". Para os efeitos do nosso estudo, vamos considerar que a forma lógica é o tipo de estrutura que permite determinar a validade de alguns tipos de argumentos. A forma lógica, contudo, é algo mais complexo e problemático.

2. Tipos de argumentos

A validade de muitos argumentos não pode ser captada recorrendo apenas à sua forma lógica. É o caso dos argumentos não dedutivos, como a indução, os argumentos de autoridade e por analogia. Mas mesmo no caso dos argumentos dedutivos, só alguns são formais. Noutros casos, a forma lógica também não é suficiente para captar a sua validade. Por exemplo, o argumento seguinte é dedutivamente válido, mas a sua validade não pode ser captada recorrendo apenas à sua forma lógica:

O Asdrúbal é casado.
Logo, não é solteiro.

Os argumentos cuja validade não é formal, como é o caso dos não dedutivos, são estudados pela lógica informal. Mas a lógica informal estuda também aspectos informais dos argumentos formalmente válidos, como é o caso da noção de cogência.

<table>
<tr><th colspan="3">ALGUNS TIPOS DE ARGUMENTOS</th></tr>
<tr><th colspan="2">DEDUTIVOS</th><th>NÃO DEDUTIVOS</th></tr>
<tr><th>FORMAIS</th><th colspan="2">INFORMAIS</th></tr>
<tr><td>• Silogísticos
• Proposicionais</td><td>• Conceptuais
• Semânticos</td><td>• Indutivos:
Generalização
Previsão
• De autoridade
• Por analogia</td></tr>
</table>

3. Validade formal

Retomemos a forma lógica que já vimos:

___ e ....
Logo, ___.

Esta forma lógica é válida[1] no sentido em que todos os argumentos que tenham esta forma são válidos. Não é difícil ver que qualquer argumento com esta forma lógica será válido, mesmo que a premissa seja falsa:

A neve é azul e a Argentina é maior do que o Brasil.
Logo, a neve é azul.

Este argumento é válido porque *se* a premissa fosse verdadeira, a conclusão também o seria. Na realidade, a conclusão é falsa. Mas isso é só porque a premissa também o é. (E, claro, argumento não é sólido; logo, também não é cogente.)

[1] A rigor nenhuma forma lógica é primitivamente válida nem inválida; só derivadamente se pode dizer que uma dada forma lógica é válida, quando todos os argumentos que têm essa forma lógica são válidos. As formas lógicas não podem ser válidas nem inválidas porque a validade é uma relação de valores de verdade e as formas lógicas não são constituídas por proposições, que podem ser verdadeiras ou falsas, mas apenas por formas proposicionais, que não podem ser verdadeiras nem falsas. A proposição que a neve é branca e o carvão preto é verdadeira, mas "P e Q" não é o género de coisa que possa ser verdadeira ou falsa; representa apenas a forma lógica de um número infinito de proposições que, essas sim, serão verdadeiras ou falsas.

Nem todas as formas lógicas são válidas. Na verdade, basta mudar da palavra "e" para a palavra "ou" e obtemos uma forma lógica inválida:

> ___ ou ....
> Logo, ___.

Esta forma lógica é inválida porque *alguns* dos argumentos que têm esta forma (mas não todos) são inválidos. Vejamos um exemplo:

> A relva é azul ou verde.
> Logo, a relva é azul.

Este argumento é obviamente inválido porque a premissa é verdadeira, mas a conclusão é falsa. É por isso que a forma lógica anterior é inválida.

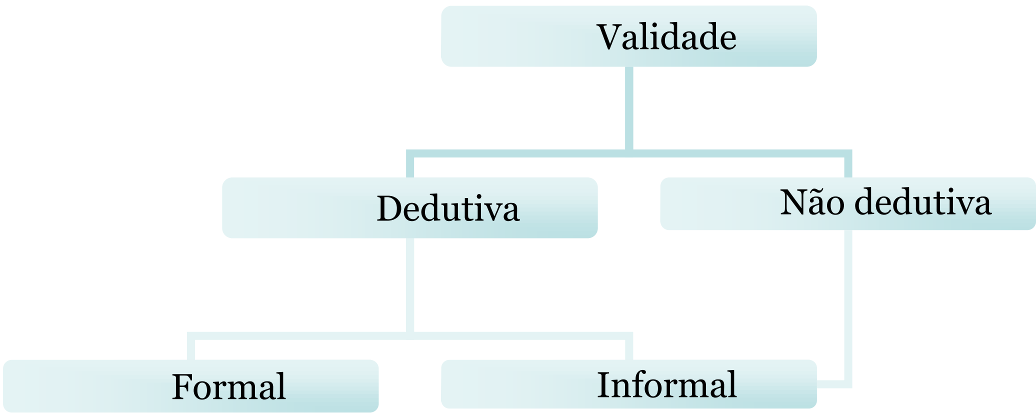
Pode parecer estranho que a premissa seja verdadeira. Mas é verdadeira porque quando dizemos "uma coisa ou outra" a nossa afirmação é verdadeira desde que uma das coisas seja verdadeira. Dado que a relva é verde, é verdade que é azul ou verde.

Quando uma forma lógica é inválida isso não significa que *todos* os argumentos com essa forma são inválidos; apenas *alguns* deles o são. Eis um argumento válido que tem a forma lógica inválida anterior:

> A relva tem cor ou é verde.
> Logo, a relva tem cor.

Este argumento é válido, mas a sua validade é informal. É uma validade conceptual, mas não formal. A lógica formal não estuda este tipo de validade, ainda que seja dedutiva.

A lógica formal não estuda igualmente os argumentos não dedutivos, pois a validade destes argumentos nunca é formal.



Revisão

1. Explique a noção de forma lógica.
2. Defina "lógica formal".

3. Assinale o valor de verdade das seguintes afirmações:
   a) Os argumentos que têm uma forma válida são válidos.
   b) Os argumentos que têm uma forma inválida são inválidos.

4. Formas proposicionais

Retomemos o argumento anteriormente apresentado:

Halo 3 é um jogo muito bom e a Internet é muito útil.
Logo, Halo 3 é um jogo muito bom.

Como vimos, a validade deste argumento pode ser determinada recorrendo apenas à sua forma lógica. Podemos exibir a forma lógica do argumento usando as letras P e Q:

P e Q.
Logo, P.

Vamos usar letras maiúsculas P, Q, R, etc., para representar lugares vazios que só podem ser ocupados por proposições. Se P for a proposição expressa por "Ouro Preto é uma cidade" e se Q for a proposição expressa por "O Brasil é muito bonito", obtemos o argumento anterior.

- Chama-se **variável proposicional** ao símbolo (P, Q, R, etc.) que representa lugares vazios que só podem ser ocupados por proposições.

Em lógica, ou em qualquer outra disciplina, é muito importante saber exatamente o que significam os símbolos que usamos. P e Q representam proposições; representam apenas proposições e nada mais. Não podem representar, por exemplo, nomes próprios, como "Asdrúbal", pois nenhum nome, isoladamente, forma uma proposição.

5. Operadores proposicionais

Como vimos, basta mudar da palavra "e" para a palavra "ou" e obtemos uma forma lógica inválida:

P ou Q.
Logo, P.

Esta forma lógica é inválida porque há imensos argumentos com esta forma cujas premissas são verdadeiras e cujas conclusões são falsas:

Platão era romano ou Platão era grego.
Logo, Platão era romano.

Este argumento é inválido: a sua premissa é verdadeira e a sua conclusão é falsa. Podemos assim concluir que as palavras "ou" e "e" desempenham um papel central na forma lógica, pois basta substituir uma pela outra e passamos de uma forma válida para uma forma inválida.

Tanto o "e" como o "ou" são operadores proposicionais.

- Um **operador proposicional** é uma expressão que se pode acrescentar a uma proposição ou proposições, formando assim novas proposições.

Por exemplo, se acrescentarmos corretamente o operador "ou" a "Platão era romano" e "Platão era grego" ficamos com "Platão era romano ou Platão era grego" (que em geral se abrevia assim: "Platão era romano ou grego").

Há muitos operadores proposicionais, além de "e" e "ou": "Penso que", "Tenho medo que", "não", "se..., então...", etc. Alguns operadores aplicam-se a uma única proposição; outros aplicam-se a mais de uma. Para aplicar o operador "e" precisamos de duas proposições. Mas para aplicar o operador "Penso que" basta uma.

Como o nome indica, os operadores proposicionais só se aplicam a proposições; não se aplicam a partes de proposições, como "é alto". Por exemplo, "é magro e é alto" não exprime uma proposição. Claro que no dia-a-dia podemos dizer "É magro e é alto", mas isso só acontece porque estamos a abreviar algo como "O cantor é magro e é alto".

Revisão

1. O que é uma variável proposicional? Defina e dê exemplos.
2. O que é um operador proposicional? Defina e dê exemplos.
3. Assinale os operadores presentes nas proposições expressas a seguir e reescreva-as sem os operadores.

   a) Aristóteles pensava que a virtude era o centro da ética.
   b) Ou Deus existe ou a Bíblia está enganada.
   c) Tanto Platão como Aristóteles eram filósofos gregos.
   d) Não há lobisomens.

6. Operadores verofuncionais

Alguns operadores, como "ou" e "e", têm uma característica especial: são verofuncionais.

- Um operador proposicional é **verofuncional** quando o valor de verdade da proposição com o operador é inteiramente determinado pelo valor de verdade da proposição ou proposições sem o operador.

Chama-se também "conectiva proposicional" aos operadores verofuncionais.

Isto significa que se partirmos de duas proposições, P e Q, e se as ligarmos com “ou”, por exemplo, saberemos qual é o valor de verdade de “P ou Q”, desde que saibamos o valor de verdade de P e de Q.

Por exemplo, se sabemos que o João não está na praia mas sim no cinema, então sabemos que “O João está na praia ou no cinema” é verdadeira; e sabemos que “O João está na praia e no cinema” é falsa. Mas mesmo que saibamos que o João está no cinema, não podemos saber se “A Maria pensa que o João está no cinema” é verdadeira ou falsa.

Assim, “e” e “ou” são operadores verofuncionais porque os valores de verdade de “O João está no cinema” e “O João está na praia” determinam inteiramente o valor de verdade de “O João está na praia ou no cinema” e de “O João está na praia e no cinema”. Mas “A Maria pensa que” não é um operador verofuncional porque o valor de verdade de “O João está no cinema” não é suficiente para determinar o valor de verdade de “A Maria pensa que o João está no cinema”.

7. Tabelas de verdade

Quando um operador é verofuncional acontece algo muito interessante. Mesmo que não saibamos se o João está no cinema, na praia ou noutro sítio qualquer, sabemos isto: “O João está no cinema ou na praia” exprime uma proposição que só será falsa no caso de o João não estar nem no cinema nem na praia. E isto acontece com qualquer proposição da forma “P ou Q”: só será falsa se P e Q forem ambas falsas; caso contrário, será verdadeira. Podemos representar isto graficamente numa tabela de verdade:

P Q	P ou Q
V V	V
V F	V
F V	V
F F	F

Uma **tabela de verdade** é um dispositivo gráfico que permite exibir as condições de verdade de uma forma proposicional dada.

Cada fila da tabela de verdade acima representa graficamente as condições de verdade do operador “ou”.

As **condições de verdade** são as circunstâncias que tornam uma proposição verdadeira ou falsa.

No caso de “P ou Q”, há quatro condições de verdade, que resultam da combinação dos dois valores de verdade possíveis de P e Q: podem ser ambas verdadeiras ou ambas falsas, ou pode uma ser verdadeira e a outra falsa, ou vice-versa. Estas condições de verdade estão todas graficamente representadas nas filas da tabela.

Numa tabela de verdade temos de representar todas as condições de verdade. É evidente que tanto faz que P seja verdadeira e Q falsa como o contrário: P falsa e Q verdadeira.

Em ambos os casos o resultado é V. Mas temos mesmo assim de representar essas duas condições de verdade.

8. Disjunção

- Chama-se **disjunção** a uma proposição da forma "P ou Q" e **disjuntas** a P e a Q.

Disjunção	**P ou Q**
Expressão canônica	Platão refletiu sobre a ética **ou** Aristóteles refletiu sobre a ética.
Outras expressões	• Platão **ou** Aristóteles refletiram sobre a ética. • **Ou** foi Platão que refletiu sobre a ética **ou** foi Aristóteles. • No que respeita refletir sobre a ética, a **alternativa** é entre Platão e Aristóteles.

A tabela de verdade da disjunção é uma forma simples de representar graficamente o significado verofuncional da disjunção. Mesmo que o valor de verdade de "Deus existe" e de "A vida faz sentido" seja desconhecido, sabemos que "Deus existe ou a vida faz sentido" só será falsa se as duas proposições anteriores forem falsas. E é isto que a tabela de verdade da disjunção representa.

Revisão

1. O que é um operador proposicional verofuncional? Defina e dê exemplos.
2. O que são as condições de verdade de um operador proposicional?
3. O que é uma tabela de verdade e para que serve?
4. Por que razão a tabela de verdade da disjunção tem exatamente quatro filas, e não outro número qualquer?
5. Considere-se a disjunção "A vida tem sentido ou a felicidade não é possível".

   a) Admitindo que a vida tem sentido, a disjunção é verdadeira ou falsa? Porquê?
   b) Admitindo que a vida não tem sentido e que não sabemos se a felicidade é possível, é possível saber se a disjunção é verdadeira ou falsa? Porquê?

9. Duas disjunções

Chama-se **disjunção inclusiva** ao tipo de disjunção que vimos até agora. Este não é o único tipo de disjunção. Por vezes, usamos a palavra "ou" com outro significado verofuncional: dizemos coisas como "Ou Aristóteles nasceu em Atenas ou em Estagira". Neste caso, se a primeira disjunta for verdadeira, a segunda é falsa, e vice-versa: se Aristóteles nasceu em Atenas, não nasceu em Estagira, e vice-versa.

Chama-se **disjunção exclusiva** a este tipo de disjunção, que só é verdadeira caso uma e uma só das proposições disjuntas seja verdadeira. A tabela de verdade da disjunção exclusiva é a seguinte:

P Q	P ou Q
V V	F
V F	V
F V	V
F F	F

Como se pode ver, esta tabela é muito diferente da anterior; agora, "P ou Q" só é verdadeira na segunda e terceira linhas.

Assim, a palavra "ou" é ambígua entre dois significados verofuncionais muito diferentes. Muitas vezes repetimos o termo "ou" para assinalar a exclusividade da disjunção, como em "Ou Aristóteles nasceu em Atenas ou em Estagira". Mas outras vezes repetimos o "ou" só por uma questão de ênfase, querendo de fato exprimir a disjunção inclusiva. Por exemplo, se alguém disser "Ou a Joana foi à praia ou foi a Maria", a disjunção em causa é inclusiva: a verdade da primeira disjunta não implica a falsidade da segunda.

Como podemos saber se estamos a usar uma disjunção exclusiva ou inclusiva? Não há regras fiáveis. Geralmente, a decisão não é lógica: depende do nosso conhecimento geral das coisas, e não da lógica apenas. Por exemplo, é porque sabemos que uma pessoa não pode nascer em duas cidades diferentes, que sabemos que no exemplo anterior a disjunção é exclusiva. Mas quando estamos a discutir problemas filosóficos é muito difícil determinar se a disjunção é ou não exclusiva.

Revisão

1. Assinale quais das seguintes disjunções são inclusivas e quais são exclusivas, explicando porquê:

    a) Ou a arte não pode ser definida ou Weitz não tem razão.
    b) O Asdrúbal foi pelas escadas ou pelo elevador.
    c) O universo é indeterminado ou não temos livre-arbítrio.
    d) O Mário está em Luanda ou em Lisboa.

10. Cinco formas proposicionais

A lógica proposicional clássica estuda a argumentação cuja validade depende exclusivamente de cinco operadores verofuncionais, que dão origem a cinco formas proposicionais:

1. Disjunção inclusiva: P ou Q.
2. Conjunção: P e Q.
3. Negação: não P.

4. Condicional: se P, então Q.
5. Bicondicional: P se, e só se, Q.

Com estes cinco operadores verofuncionais podemos exprimir qualquer outro operador verofuncional. Por exemplo, a disjunção exclusiva pode ser expressa negando uma bicondicional, pois as duas proposições seguintes são equivalentes:

- Ou Aristóteles era grego ou era romano.
- Não é verdade que Aristóteles era grego se, e só se, era romano.

Por esta razão, sempre que falarmos de disjunção daqui para a frente estaremos a referir-nos à disjunção inclusiva.

Também o operador "nem... nem..." pode ser expresso usando os outros operadores da lista acima, pois as seguintes duas proposições são equivalentes:

- Nem Platão nem Aristóteles eram romanos.
- Platão não era romano e Aristóteles não era romano.

Assim, podemos usar os cinco operadores da lista anterior para dar conta de todos os argumentos cuja validade ou invalidade depende do uso de operadores proposicionais verofuncionais. E isto é precisamente o que estuda a lógica proposicional clássica.

Os argumentos baseados nestes operadores ocorrem constantemente no nosso pensamento. Assim, estes operadores são como "tijolos" do pensamento: elementos sem os quais quase não é possível pensar ou argumentar.

11. Constantes lógicas

Se quisermos, podemos economizar e usar símbolos para os operadores. Assim, em vez de escrever "Se P, então Q", podemos escrever apenas $P \rightarrow Q$. Eis os símbolos que geralmente se usam e que passaremos a usar a partir de agora:

Não P:	$\neg P$
P e Q:	$P \wedge Q$
P ou Q (inclusiva):	$P \vee Q$
Se P, então Q:	$P \rightarrow Q$
P se, e só se, Q:	$P \rightleftarrows Q$

A estes símbolos chama-se **constantes lógicas.** Contrastam com os símbolos P, Q, etc., que são variáveis proposicionais.

Os nomes são adequados. Por exemplo, P é uma variável porque simboliza qualquer proposição. Mas $\rightarrow$ é uma constante porque simboliza exclusivamente a expressão "se..., então...".

Podemos usar o símbolo $\veebar$ para representar as disjunções exclusivas. Contudo, como vimos, podemos também representar as disjunções exclusivas como negações de bicondicionais.

Já vimos brevemente a disjunção inclusiva e a tabela de verdade que representa as suas condições de verdade. Vamos agora ver as condições de verdade dos restantes operadores.

12. Conjunção

Chama-se **conjunção** a uma proposição da forma “P e Q”, e **conjuntas** às proposições P e Q.

Conjunção	**P e Q**
Símbolo	$\wedge$
Expressão canônica	O conhecimento é estudado pela filosofia **e** a fé é estudada pela filosofia.
Outras expressões	• O conhecimento **e** a fé são estudados pela filosofia. • O conhecimento é estudado pela filosofia **e** a fé também. • **Tanto** o conhecimento **como** a fé são estudados pela filosofia. • A filosofia estuda **quer** o conhecimento, **quer** a fé. • O conhecimento é estudado pela filosofia **mas** a fé também o é.

As condições de verdade da conjunção são evidentes. Uma proposição com a forma P $\wedge$ Q só é verdadeira se P e Q forem ambas verdadeiras; em todos os outros casos é falsa:

P Q	**P $\wedge$ Q**
V V	V
V F	F
F V	F
F F	F

Por exemplo, a conjunção “Ouro Preto é uma cidade e Espanha um país” só é verdadeira se as duas proposições que a compõem forem verdadeiras; caso contrário, é falsa.

13. Negação

As condições de verdade da negação são ainda mais elementares do que as da disjunção e da conjunção.

Chama-se **negação** a qualquer proposição da forma “não P”.

Negação	**Não P**
Símbolo	¬
Expressão canônica	O conhecimento **não** é possível.
Outras expressões	• **Não é verdade que** o conhecimento seja possível. • **Não é o caso que** o conhecimento seja possível. • O conhecimento é **im**possível.

Como é evidente, ¬P é falsa unicamente quando P é verdadeira, e é verdadeira unicamente quando P é falsa:

P	**¬P**
V	F
F	V

Por exemplo, a negação "Deus não existe" só é verdadeira se for falso que Deus existe.

A negação é o único dos cinco operadores proposicionais que se aplica a uma só proposição e não a duas. Diz-se por isso que é um operador unário, ao passo que os outros são binários.

Um operador proposicional é **binário** quando se aplica a duas proposições e **unário** quando se aplica só a uma.

Revisão

1. Considere-se a conjunção "A vida tem sentido e a felicidade é real".
   a) Admitindo que a vida não tem sentido, a conjunção é verdadeira ou falsa? Porquê?
   b) Admitindo que a vida tem sentido e que não sabemos se a felicidade é real, é possível saber se a conjunção é verdadeira ou falsa? Porquê?
   c) Admitindo que a vida tem sentido, a conjunção "A vida não tem sentido" é verdadeira ou falsa? Porquê?
2. Por que razão a tabela de verdade da negação tem apenas duas filas e não quatro?

14. Condicional

Chama-se **condicional** a qualquer proposição da forma "Se P, então Q", e chama-se **antecedente** a P e **conseqüente** a Q.

Por vezes, chama-se também **implicação** à condicional.

Condicional	**Se P, então Q**
Símbolo	$\rightarrow$
Expressão canônica	**Se** há pensamento, **então** há matéria.
Outras expressões	• **Se** há pensamento, há matéria. • Há matéria, **se** houver pensamento. • Há matéria **caso** haja pensamento. • Não há pensamento, **a menos que** haja matéria. • Não há pensamento, **a não ser que** haja matéria. • **Sempre que** há pensamento, há matéria. • A matéria é uma **condição necessária** do pensamento. • O pensamento é uma **condição suficiente** da matéria.

É evidente que a condicional “Se Aristóteles era grego, era africano” é falsa. É falsa porque a antecedente é verdadeira e a conseqüente falsa. Mas que dizer do valor de verdade da condicional “Se Aristóteles era português, era africano”? Quase qualquer pessoa diria que esta condicional é falsa. Contudo, na lógica proposicional considera-se, desde o tempo dos estóicos, que é verdadeira. Este é um problema em aberto, que tem provocado muitas discussões ao longo da história da filosofia. Não vamos tratar deste problema. Mas temos de ter consciência que a lógica clássica entende as condicionais de uma maneira especial.

Intuitivamente, achamos que uma condicional como “Se Aristóteles era português, era africano” é falsa porque sabemos que se Aristóteles fosse mesmo português, não seria africano: seria europeu. A nossa intuição baseia-se no fato de ser falso que os portugueses sejam africanos; olhamos para a condicional e vemos outra condicional: “Se alguém é português, é africano”. E como esta condicional é realmente falsa, pensamos que a outra condicional também é falsa.

Mas na lógica clássica olha-se unicamente para o valor de verdade da antecedente e conseqüente da condicional literal e considera-se que uma condicional só é literalmente falsa quando parte de uma verdade e chega a uma falsidade; em todos os outros casos, a condicional é verdadeira:

P Q	**P → Q**
V V	V
V F	F
F V	V
F F	V

Assim, na lógica clássica considera-se que:

- Uma **condicional** só é falsa quando a sua antecedente é verdadeira e a sua conseqüente falsa; em todos os outros casos é verdadeira.

Por exemplo, a condicional “Se Deus existe, a vida faz sentido” só é falsa caso Deus exista e a vida não faça sentido; se Deus não existir, a proposição é verdadeira, apesar de ser enganadora.

Considere-se a condicional “Se a neve é branca, Platão era grego”. Intuitivamente, não consideramos esta condicional verdadeira. Contudo, considera-se que é verdadeira na lógica clássica porque não tem uma antecedente verdadeira e uma conseqüente falsa.

A nossa intuição de que a condicional não é verdadeira resulta da ausência de qualquer conexão, causal ou conceptual, entre a antecedente e a conseqüente. Muitas vezes, quando afirmamos “Se P, então Q”, estamos a exprimir uma conexão causal ou conceptual: dizemos, por exemplo, que se deixarmos cair um copo, ele parte-se; ou dizemos que se o Asdrúbal se divorciou, já não é casado. Na lógica clássica, contudo, a única relação que conta entre a antecedente e a conseqüente é a relação entre valores de verdade. Haver ou não uma conexão qualquer, conceptual ou causal, é irrelevante.

15. Comutatividade

A condicional é diferente de todos os outros operadores por não ser comutativa.

- Um operador binário é **comutativo** quando a ordem das proposições pode ser invertida sem afetar os valores de verdade.

Por exemplo, a conjunção é comutativa porque dizer que Platão e Aristóteles são gregos é o mesmo que dizer que Aristóteles e Platão são gregos: “P e Q” é o mesmo que “Q e P”. A condicional é o único operador verofuncional que não é comutativa, como se pode ver na sua tabela de verdade:

P Q	**P → Q**
V V	V
V F	F
F V	V
F F	V

Como se vê, as filas 3 e 4 têm valores de verdade diferentes.

16. Condições necessárias e suficientes

As condicionais estabelecem condições necessárias e suficientes. A antecedente de uma condicional é uma condição suficiente para a sua conseqüente. E a conseqüente de uma condicional é uma condição necessária para a sua antecedente. Assim, em P → Q a condição suficiente de Q é P, e Q é a condição necessária de P.

17. Biconditional

Vejamos agora as condições de verdade da bicondicional. Como o nome indica, trata-se da conjunção de duas condicionais: “Se P, então Q, e se Q, então P”.

Chama-se **bicondicional** a qualquer proposição da forma “P se, e só se, Q”.

Bicondicional	**P se, e só se, Q**
Símbolo	⇄
Expressão canônica	Uma obra é arte **se, e só se,** for a criação de um artista.
Outras expressões	• Uma obra é arte **se, e somente se,** for a criação de um artista. • **Se** uma obra for arte, é a criação de um artista **e vice-versa**. • Uma **condição necessária e suficiente** para algo ser uma obra de arte é ser a criação de um artista. • A arte **é** a criação de um artista. • A criação de um artista **é** a arte.

Uma bicondicional como “P se, e só se, Q” só é verdadeira caso P e Q tenham o mesmo valor de verdade; caso contrário, a bicondicional é falsa:

P Q	**P ⇄ Q**
V V	V
V F	F
F V	F
F F	V

Por exemplo, a bicondicional “O livre-arbítrio é possível se, e só se, o universo for indeterminado” só é verdadeira em dois casos: quando o livre-arbítrio é possível e o universo é indeterminado, e quando o livre-arbítrio não é possível e o universo não é indeterminado.

Chama-se também **equivalência** à bicondicional, pois uma bicondicional verdadeira estabelece a equivalência de valores de verdade entre duas proposições: as duas proposições componentes são verdadeiras e falsas exatamente nas mesmas circunstâncias. Voltaremos à noção de equivalência na secção **24.** Equivalências (pág. 27).

As bicondicionais são especialmente importantes em filosofia, pois as definições explícitas são em geral formuladas em termos de equivalência. Dizer “O Homem é um animal racional”, se for entendido como uma definição de Homem, significa “Um ser é um Homem se, e só se, for um animal racional”.

A maior parte das definições apresentadas neste manual exprimem-se com maior rigor em termos de equivalência ou bicondicional; se não o fizemos foi porque a expressão “se, e só se", apesar de mais rigorosa, torna as definições menos compreensíveis para quem não tem ainda formação filosófica. Por exemplo, definimos a validade dedutiva da seguinte maneira:

- Um argumento é dedutivamente válido quando é impossível ter premissas verdadeiras e conclusão falsa.

A definição rigorosa é a seguinte:

- Um argumento é dedutivamente válido **se, e só se,** é impossível ter premissas verdadeiras e conclusão falsa.

Ou seja, se um argumento é dedutivamente válido, então é impossível ter premissas verdadeiras e conclusão falsa; e se for impossível que um argumento tenha premissas verdadeiras e conclusão falsa, então esse argumento é dedutivamente válido.

Revisão

1. Considere-se a condicional "Se Deus existe, a vida tem sentido".

   a) Admitindo que Deus não existe, a condicional é verdadeira ou falsa? Porquê?
   b) Admitindo que Deus existe e que não sabemos se a vida tem sentido, é possível saber se a condicional é verdadeira ou falsa? Porquê?
   c) Admitindo que a vida tem sentido, a condicional é verdadeira ou falsa? Porquê?

2. Recorrendo a tabelas de verdade e a exemplos de proposições, explique por que razão a bicondicional é comutativa mas a condicional não.
3. Considere-se a bicondicional "Deus existe se, e só se, a vida tem sentido".

   a) Admitindo que Deus existe e que a vida não tem sentido, a bicondicional é verdadeira ou falsa? Porquê?
   b) Admitindo que Deus não existe e que a vida não tem sentido, a bicondicional é verdadeira ou falsa? Porquê?
   c) Admitindo que a vida tem sentido mas que não sabemos se Deus existe, é possível saber se a bicondicional é verdadeira ou falsa? Porquê?

18. Formalização

Para formalizar proposições é preciso compreender com rigor o significado verofuncional das proposições em causa. Assim, o primeiro passo para formalizar uma proposição é encontrar os operadores verofuncionais. Por vezes, os operadores estão ocultos. Quando afirmamos, por exemplo, que Zeus é imortal, pode parecer que não está presente qualquer operador; mas de fato estamos a afirmar que Zeus não é mortal. O operador de negação está escondido.

Além disso, há inúmeras maneiras de exprimir a mesma proposição. Como vimos, tanto podemos dizer que se os seres humanos são mortais, então são infelizes, como podemos dizer que uma condição necessária para os seres humanos serem mortais é serem infelizes. Assim, para formalizar uma proposição temos de começar por colocá-la na sua expressão canônica, caso não o esteja já.

Vejamos um exemplo:

- A vida não vale a pena a menos que sejamos imortais.

A expressão “a menos que” exprime uma condicional. Consultando a **página 12**, verificamos que “Não P a menos que Q” é o mesmo que “Se P, então Q”. Assim, já podemos escrever a expressão canônica da proposição:

1. Expressão canônica

Se a vida vale a pena, então somos imortais.

Agora é mais fácil isolar as proposições componentes e atribuir-lhes variáveis proposicionais. É a isso que se chama uma interpretação. Dado que temos duas proposições componentes, temos de ter duas variáveis:

2. Interpretação

P: A vida vale a pena.
Q: Os seres humanos são mortais.

3. Formalização

$P \rightarrow \neg Q$

Poderíamos usar R e S, por exemplo, em vez de P e Q. Ou poderíamos atribuir a Q a proposição que nesta interpretação atribuímos a P.

Mas não podemos atribuir às variáveis algo como “Vale a pena”. Só lhes podemos atribuir uma proposição, ou seja, um pensamento que seja verdadeiro ou falso.

Também não podemos atribuir-lhes algo como “somos imortais”. Esta expressão abrevia a proposição de que os seres humanos são imortais. Ao formalizar proposições não podemos usar este tipo de contrações. Em lógica, temos de ser completamente explícitos.

As proposições que atribuímos às variáveis não podem conter operadores verofuncionais. Afirmar que os seres humanos são imortais é afirmar que não são mortais; assim, atribui-se Q a “Os seres humanos são mortais”, eliminando a negação oculta.

Também não faz sentido atribuir uma variável a “Se a vida vale a pena”, porque esta seqüência de palavras não exprime uma proposição, além de conter um operador verofuncional.

Assim, para formalizar uma proposição percorre-se os seguintes passos:

1. **Expressão canônica:** formula-se a proposição na sua expressão canônica;
2. **Interpretação:** atribui-se variáveis proposicionais à proposição ou proposições componentes;

3. **Formalização:** formaliza-se a proposição.

Revisão

1. Formalize as proposições expressas a seguir:

a) Se tudo está determinado, o livre-arbítrio é impossível.
b) Sempre que chove, o presidente fica eloqüente.
c) Não há imortais.
d) Ou Deus existe ou a vida não faz sentido.
e) O Homem é um bípede sem penas.
f) Nem Kant nem Hegel sabiam inglês.
g) Ser um artefacto não é uma condição suficiente para que algo seja uma obra de arte.

19. Inspetores de circunstâncias

A validade de alguns argumentos pode ser estabelecida recorrendo exclusivamente aos operadores verofuncionais. Uma vez que podemos usar tabelas de verdade para representar as condições de verdade destes operadores, podemos também usar seqüências de tabelas de verdade de um certo tipo para testar a validade de argumentos baseados nestes operadores. A essas seqüências de tabelas de verdade dá-se o nome de "inspetores de circunstâncias".

Os inspetores de circunstâncias só permitem analisar corretamente formas argumentativas cuja validade dependa inteiramente dos operadores verofuncionais. Se aplicarmos os inspetores de circunstâncias a outro tipo de formas argumentativas, não conseguiremos captar a sua validade.

Um **inspetor de circunstâncias** é um dispositivo gráfico que permite determinar se a forma lógica de um argumento proposicional verofuncional é ou não válida.

Retomemos a seguinte forma argumentativa:

$P \land Q$.
Logo, P.

Para testar esta forma usando um inspetor começamos por colocá-la na horizontal. E para não ter de escrever "logo" usamos o seguinte símbolo, a que se chama "martelo semântico": $\vDash$. Ficamos assim com o seguinte:

$$P \land Q \vDash P$$

E agora é como se fizéssemos uma tabela de verdade para a premissa e outra para a conclusão, juntando as duas:

P Q	$P \wedge Q$	$\vDash$	P
V V	V		V
V F	F		V
F V	F		F
F F	F		F

Debaixo da premissa escrevemos o valor de verdade dessa premissa em cada uma das suas condições de verdade. E fazemos o mesmo para a conclusão.

Ora, como vimos, num argumento dedutivamente válido é impossível as premissas serem verdadeiras e a conclusão falsa. Isto significa que para saber se um argumento dedutivo é válido temos de ver se há alguma circunstância possível em que as premissas são verdadeiras e a conclusão falsa.

E o que são as circunstâncias? São as condições de verdade, que estão exaustivamente representadas na primeira coluna dos inspetores de circunstâncias. Assim, no inspetor acima, verifica-se que o argumento é válido porque na única circunstância possível em que a premissa é verdadeira a conclusão também é verdadeira. Podemos usar uma sombra para assinalar as circunstâncias em que a premissa é verdadeira, que neste caso é só uma:

P Q	$P \wedge Q$	$\vDash$	P
V V	V		V
V F	F		V
F V	F		F
F F	F		F

Vejamos outra forma argumentativa:

$P \vee Q$.
Logo, P.

Esta é a forma de argumentos como “Platão é romano ou Aristóteles é grego; logo, Platão é romano”. É evidente que o argumento é inválido, mas o inspetor de circunstâncias mostra porquê:

P Q	$P \vee Q$	$\vDash$	P
V V	V		V
V F	V		V
F V	V		F
F F	F		F

Agora temos três circunstâncias em que a premissa é verdadeira. E o argumento é inválido porque numa delas a conclusão é falsa. Isto significa que a conclusão pode ser falsa, ainda que a premissa seja verdadeira — que é precisamente o que não pode acontecer num argumento válido.

E se a forma argumentativa tiver mais de uma premissa? Vejamos como fazer um inspetor nesses casos. Como exemplo, vamos usar esta forma lógica:

$P \vee Q$.
$\neg P$.
Logo, Q.

Dado que temos duas premissas, fazemos mais uma tabela sob a segunda premissa, que separamos da primeira com uma vírgula:

P Q	**$P \vee Q$,**	**$\neg P$**	**$\vDash$**	**Q**
V V	V	F		V
V F	V	F		F
F V	V	V		V
F F	F	V		F

A forma argumentativa é válida porque não há qualquer circunstância em que **todas** as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa.

Como é evidente pela análise do inspetor de circunstâncias, a ordem das premissas de um argumento é irrelevante.

Uma forma argumentativa só é válida se em todas as circunstâncias em que todas as premissas são verdadeiras a conclusão também é verdadeira; caso contrário, é inválida. Assim, no inspetor anterior, a única circunstância que conta é a terceira, pois em nenhuma das outras as duas premissas são verdadeiras.

Uma forma é inválida mesmo que em algumas circunstâncias tenha premissas e conclusão verdadeiras, como no seguinte caso:

P Q	**$P \vee Q$,**	**P**	**$\vDash$**	**Q**
V V	V	V		V
V F	V	V		F
F V	V	F		V
F F	F	F		F

Esta forma é inválida porque a segunda circunstância tem premissas verdadeiras e conclusão falsa. É irrelevante que na primeira circunstância as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa. Pois basta haver uma circunstância em que as premissas são verdadeiras e a conclusão falsa para a verdade das premissas não impedir a falsidade da conclusão.

Os inspetores de circunstâncias mostram o que significa dizer que num argumento válido é impossível as premissas serem verdadeiras e a conclusão falsa. E mostram igualmente por que razão é absurdo rejeitar a conclusão de um argumento válido se aceitarmos as suas premissas: porque se o argumento for válido e as premissas verdadeiras não há qualquer maneira de a conclusão ser falsa. Assim, quando discordamos da conclusão de um argumento válido tudo o que podemos fazer é mostrar que pelo menos uma das premissas é falsa.

Exercícios

1. Teste a validade das seguintes formas recorrendo a inspetores de circunstâncias:
   a) $P \wedge Q, \neg P \vDash Q$
   b) $P \vee Q, \neg P \vDash Q$
   c) $P \rightarrow Q \vDash P \rightleftarrows Q$
   d) $P \rightleftarrows Q \vDash P \rightarrow Q$
   e) $P \rightarrow Q \vDash Q \wedge P$
   f) $P \rightarrow Q \vDash Q \rightarrow P$
   g) $P \rightarrow Q, Q \rightarrow P \vDash \neg P \vee Q$

20. Âmbito dos operadores

Até agora quase só demos atenção a formas proposicionais em que cada operador incide unicamente sobre formas proposicionais simples. Mas nada impede que um operador incida sobre formas proposicionais compostas.

- Uma **forma proposicional simples** não contém quaisquer operadores verofuncionais.
- Uma **forma proposicional composta** contém operadores verofuncionais.

Por exemplo, em $\neg P$ o símbolo $\neg$ opera sobre P; e em $P \rightarrow Q$ o símbolo $\rightarrow$ opera sobre P e Q. Tanto $\neg$ como $\rightarrow$ operam sobre formas proposicionais simples. Mas “A vida não tem sentido” exprime uma proposição composta. Formaliza-se como $\neg P$, sendo P “A vida tem sentido”.

É evidente que podemos também afirmar “Não é verdade que a vida não tem sentido”, que se formaliza como $\neg\neg P$. Ao passo que a primeira negação opera sobre P, a segunda opera sobre $\neg P$ — ou seja, opera sobre uma forma proposicional composta.

Isto significa que podemos formar um número infinito de formas lógicas partindo apenas das cinco formas proposicionais de base. Mas significa também que teremos de ter cuidado com o âmbito dos diferentes operadores. Comparemos as seguintes proposições:

1. Não é verdade que se a vida faz sentido, Deus existe.
2. Se não é verdade que a vida faz sentido, Deus existe.

Em 1, a negação afeta uma proposição que já contém um operador: “Se a vida faz sentido, Deus existe”. Mas no caso da proposição 2, a negação só afeta “A vida faz sentido”.

A diferença entre 1 e 2 é mais clara se olharmos apenas para a forma lógica:

1. $\neg(P \rightarrow Q)$
2. $\neg P \rightarrow Q$

Como se pode ver, em lógica proposicional usam-se parênteses para indicar o âmbito dos operadores, o que torna tudo muito mais claro.

O **âmbito** de um operador é a proposição ou proposições que esse operador afeta.

Em 1 estamos a negar a condicional P → Q, que colocamos entre parênteses para indicar precisamente isso. O âmbito da negação é uma condicional. Em 2 nega-se apenas P. O âmbito da negação é uma proposição simples. 1 é uma negação porque é esse o operador de maior âmbito; 2 é uma condicional porque é esse o operador de maior âmbito.

Ao operador de maior âmbito chama-se também **operador principal.** Uma forma proposicional não pode ter mais de um operador principal.

1 e 2 têm diferentes condições de verdade. Para o verificar, vamos fazer uma tabela de verdade para 1 e outra para 2. Cada uma das tabelas exige a determinação de valores de verdade parciais, antes de chegar aos valores de verdade globais. Comecemos por 1:

P Q	**¬(P → Q)**
V V	**F** V
V F	**V** F
F V	**F** V
F F	**F** V

Numa tabela de verdade para uma forma proposicional complexa, a última coluna a preencher é sempre a coluna do operador principal. Como esta forma é uma negação (apesar de conter uma condicional), a última coluna a preencher é a coluna do ¬. Por isso, começa-se por determinar os valores de verdade de P → Q. Depois, determina-se o valor da negação de cada um desses resultados: a negação de V é F, a negação de F é V. Estes resultados, que destacamos a azul, surgem debaixo da negação e são os resultados finais: são as condições de verdade da proposição. Assim, 1 só é verdadeira caso P seja verdadeira e Q falsa.

Vejamos agora 2:

P Q	**¬P → Q**
V V	F **V** V
V F	F **V** F
F V	V **V** V
F F	V **F** F

No caso da segunda forma proposicional começa-se por determinar os valores de ¬P, resultados que se escrevem por debaixo do respectivo operador. Depois, é necessário determinar os valores da condicional cuja antecedente é ¬P. Para facilitar o trabalho, podemos reescrever os valores de Q por debaixo da respectiva variável. Assim, a primeira linha é V porque uma condicional com antecedente F e conseqüente V é V; a segunda linha é V, etc. Estes são os resultados finais, destacados a azul.

Agora podemos comparar as condições de verdade das duas formas proposicionais:

Negação de uma condicional

P Q	$\neg(P \rightarrow Q)$
V V	**F** V
V F	**V** F
F V	**F** V
F F	**F** V

Condicional com antecedente negada

P Q	$\neg P \rightarrow Q$
V V	F **V** V
V F	F **V** F
F V	V **V** V
F F	V **F** F

Verificamos que as duas formas proposicionais têm condições de verdade muito diferentes. A segunda só é falsa caso P e Q sejam ambas falsas; a primeira só é verdadeira quando P é verdadeira e Q falsa. Logo, as duas formas proposicionais não são equivalentes.

Exercícios

1. Indique qual é o operador principal nas formas proposicionais seguintes:

    a) $\neg(P \land Q)$
    b) $\neg P \land Q$
    c) $\neg P \rightleftarrows \neg Q$
    d) $\neg(P \rightleftarrows \neg Q)$
    e) $P \rightleftarrows (\neg Q \land P)$
    f) $P \land \neg(Q \land P)$
    g) $\neg(P \land \neg(Q \land P))$

2. Construa uma tabela de verdade para cada uma das formas proposicionais anteriores.
3. Formalize as proposições expressas a seguir:

    a) Sartre não era parisiense se, e só se, Paris era uma cidade alemã.
    b) Não é verdade que Sartre não era parisiense se, e só se, Paris era uma cidade alemã.
    c) Não há felicidade nem justiça.
    d) Não é verdade que há ou felicidade ou justiça.
    e) Não há felicidade ou justiça.

21. Formas válidas e inválidas

Algumas formas argumentativas válidas são tão comuns que têm nome. E também por serem muito comuns, confundem-se com formas inválidas semelhantes.

FORMAS VÁLIDAS

Silogismo hipotético	**Silogismo disjuntivo**	**Dilema**
Se P, então Q. Se Q, então R. Logo, se P, então R.	P ou Q. Não P. Logo, Q.	P ou Q Se P, então R. Se Q, então R. Logo, R.
Modus ponens	***Modus tollens***	**Contraposição**
Se P, então Q. P. Logo, Q.	Se P, então Q. Não Q. Logo, não P.	Se P, então Q. Logo, se não Q, então não P.

FORMAS INVÁLIDAS

Afirmação da conseqüente	**Negação da antecedente**	**Inversão da condicional**
Se P, então Q. Q. Logo, P.	Se P, então Q. Não P. Logo, não Q.	Se P, então Q. Logo, se Q, então P.

Exercícios

1. Demonstre a validade ou invalidade das formas anteriores recorrendo a inspetores de circunstâncias.
2. Identifique a forma dos seguintes argumentos, indicando se são válidas ou inválidas:
   a) Se a felicidade for possível, a vida faz sentido.
   Logo, se a vida fizer sentido, a felicidade é possível.
   b) Se Sartre tiver razão, temos livre-arbítrio.
   Mas não temos livre-arbítrio.
   Logo, Sartre não tem razão.
   c) Se a coragem é filha do medo, o medo é pai da coragem.
   Logo, se o medo não é pai da coragem, a coragem não é filha do medo.
   d) Se temos livre-arbítrio, Sartre tinha razão.
   Ora, Sartre tinha razão.
   Logo, temos livre-arbítrio.

e) Se os animais não humanos sentem dor, são dignos de proteção moral.
Mas os animais não humanos não sentem dor.
Logo, não são dignos de proteção moral.

f) Se Deus existe, a vida tem sentido.
Ora, Deus existe.
Logo, a vida tem sentido.

22. Avaliação de argumentos

Consideremos o seguinte argumento:

A alternativa é entre a relatividade da ética e a implausibilidade do absolutismo.
O absolutismo é implausível.
Logo, a ética é relativa.

Será este argumento válido? Para determinar a sua validade precisamos de identificar a sua forma lógica. Mas isso é só uma questão de identificar a forma lógica das proposições que o compõem, coisa que já sabemos fazer. De seguida, formalizamos todas as proposições que compõem o argumento e construímos um inspetor de circunstâncias:

1. Expressão canônica

A ética é relativa ou o absolutismo é implausível.
O absolutismo é implausível.
Logo, a ética é relativa.

2. Interpretação

P: A ética é relativa.
Q: O absolutismo é plausível.

3. Formalização

$P \vee \neg Q$.
$\neg Q$.
Logo, P.

4. Inspetor de circunstâncias

P Q	$P \vee \neg Q$,		$\neg Q$	$\vDash$	P
V V	V	F	F		V
V F	V	V	V		V
F V	F	F	F		F
F F	V	V	V		F

Finalmente, analisamos o inspetor de circunstâncias para determinar se a forma é inválida ou não:

5. Análise

> A forma argumentativa é inválida, pois na última circunstância as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa.

Temos assim uma maneira simples de determinar a validade dos argumentos. Dado um argumento, faz-se o seguinte:

1. **Expressão canônica:** formula-se as premissas e conclusão na sua expressão canônica;
2. **Interpretação:** atribui-se variáveis proposicionais às premissas e conclusão do argumento;
3. **Formalização:** exibe-se a forma lógica do argumento;
4. **Inspetor de circunstâncias:** constrói-se o inspetor, separando cada premissa com vírgulas;
5. **Análise:** interpreta-se os resultados do inspetor de circunstâncias.

Exercícios

1. Determine a forma argumentativa dos seguintes argumentos e teste a sua validade recorrendo a inspetores de circunstâncias:

   a) Ou o livre-arbítrio é possível ou a nossa vida é uma ilusão.
   O livre-arbítrio é impossível.
   Logo, a nossa vida é uma ilusão.
   b) Deus existe.
   Logo, a felicidade eterna é possível.
   c) Se Sócrates tem razão, a vida por examinar não vale a pena ser vivida.
   Logo, a vida por examinar não vale a pena ser vivida.
   d) Aristóteles era grego.
   Aristóteles não era grego.
   Logo, Deus existe.
   e) A justiça é possível se, e só se, Platão tiver razão.
   Platão não tem razão.
   Logo, a justiça não é possível.

23. Negações surpreendentes

Até agora estudamos os aspectos mais elementares da lógica proposicional. Esta lógica, contudo, pode ser desenvolvida para se tornar um instrumento bastante mais sofisticado e de maior alcance na análise da argumentação. Vamos agora estudar alguns desses desenvolvimentos.

A negação é o mais simples dos operadores verofuncionais. Seria de esperar que o seu uso não provocasse erros. Contudo, isto não é assim. A negação de algumas formas proposicionais provoca erros.

A negação de "Se temos livre-arbítrio, Sartre tem razão" é "Temos livre-arbítrio, mas Sartre não tem razão". Mas é comum pensar que a sua negação é "Se não temos livre-arbítrio, Sartre não tem razão".

A negação de uma condicional é uma conjunção, e não outra condicional. Podemos verificar isso fazendo três tabelas de verdade:

P Q	$\neg(P \rightarrow Q)$	
V V	F	V
V F	V	F
F V	F	V
F F	F	V

P Q	$\neg P \rightarrow \neg Q$		
V V	F	V	F
V F	F	V	V
F V	V	F	F
F F	V	V	V

P Q	$P \wedge \neg Q$	
V V	F	F
V F	V	V
F V	F	F
F F	F	V

A primeira forma proposicional é a própria negação da condicional. Para que outra forma proposicional a represente tem de ter as mesmas condições de verdade. A segunda forma proposicional não tem as mesmas condições de verdade da primeira. Por exemplo, no caso em que P e Q são ambas verdadeiras, a segunda forma proposicional é verdadeira, mas a primeira é falsa. Só a terceira forma proposicional tem as mesmas condições de verdade da primeira. Logo, só a terceira forma proposicional, a conjunção, representa a negação da condicional.

NEGAÇÃO DE FORMAS PROPOSICIONAIS

Designação	Forma	Resultado
Negação da condicional	$\neg(P \rightarrow Q)$	$P \wedge \neg Q$
Negação da bicondicional	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
Leis de De Morgan	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$

Exercícios

1. Admitindo que é falso que se Deus existe, a vida faz sentido, qual é o valor de verdade de "Deus existe, mas a vida não faz sentido"?
2. Admitindo que é verdade que há matéria e espírito, qual é o valor de verdade de "Não há matéria ou não há espírito"?
3. Formule primeiro a negação das proposições expressas a seguir, e depois o respectivo resultado:

a) Se a felicidade é possível, a vida tem sentido.
b) Há felicidade e justiça.
c) Sartre era alemão ou grego.
d) Um ser é racional se, e só se, sabe escrever cartas de amor.

24. Equivalências

Analisemos as seguintes tabelas de verdade:

P Q	P → Q
V V	**V**
V F	**F**
F V	**V**
F F	**V**

P Q	¬	P ∨	Q
V V	F	**V**	V
V F	F	**F**	F
F V	V	**V**	V
F F	V	**V**	F

Dado que as duas formas proposicionais têm as mesmas condições de verdade, são equivalentes.

- Duas formas proposicionais são **equivalentes** quando têm as mesmas condições de verdade.

Isto significa que as duas formas proposicionais anteriores podem ser transformadas uma na outra, mantendo as suas condições de verdade. Ou seja, dizer "Se Descartes viveu em Paris, então viveu em França" é o mesmo que dizer "Descartes não viveu em Paris ou viveu em França".

Para que duas proposições sejam equivalentes não basta que tenham o mesmo valor de verdade; é necessário que tenham o mesmo valor de verdade em quaisquer circunstâncias — ou seja, é necessário que tenham as mesmas condições de verdade. Assim, apesar de tanto "A neve é branca" como "Ouro Preto é uma cidade" exprimirem proposições verdadeiras, não exprimem proposições equivalentes.

Cada forma proposicional é equivalente a várias outras, mas algumas equivalências são particularmente importantes, como as seguintes:

Equivalências proposicionais

$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$
$P \rightleftarrows Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
$P \vee Q$	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$
$P \wedge Q$	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$
P	$\neg\neg P$

Exercícios

1. Formule proposições equivalentes às seguintes:

   a) Se a felicidade é possível, a vida tem sentido.
   b) Há felicidade e justiça.
   c) Sartre era alemão ou grego.
   d) Um ser é racional se, e só se, sabe escrever cartas de amor.
   e) Deus existe.

25. Argumentos com três variáveis

Até agora vimos argumentos cujas formas lógicas têm duas variáveis proposicionais; mas, como é evidente, a forma de alguns argumentos exige mais de duas variáveis proposicionais. Vejamos um exemplo:

> O conhecimento é possível ou os cépticos estão enganados.
> Se o conhecimento é possível, o que os cépticos dizem é uma fantasia.
> Se os cépticos estão enganados, o que eles dizem também é uma fantasia.
> Logo, em qualquer dos casos, o que os cépticos dizem é uma fantasia.

1. Interpretação

P: O conhecimento é possível.
Q: Os cépticos estão enganados.
R: O que os cépticos dizem é uma fantasia.

2. Forma lógica

$P \vee Q$.
$P \rightarrow R$.
$Q \rightarrow R$.
Logo, R.

Para testar esta forma com um inspetor de circunstâncias é agora necessário esgotar todas as combinações possíveis de valores de verdade entre P, Q e R. Quando só tínhamos duas variáveis, era fácil: só havia quatro combinações possíveis. Com três variáveis, há oito combinações possíveis.

A partir do momento em que sabemos que há oito combinações possíveis, é fácil não cometer erros. Na primeira coluna escrevemos quatro V, seguidos de quatro F. Depois escrevemos V e F aos pares. Na última coluna, escrevemos V e F alternados.

P Q R
V V V
V V F
V F V
V F F
F V V
F V F
F F V
F F F

Agora podemos testar a forma dada com um inspetor de circunstâncias:

P Q R	$P \vee Q$,	$P \rightarrow R$,	$Q \rightarrow R$	$\vDash$	R
V V V	V	V	V		V
V V F	V	F	F		F
V F V	V	V	V		V
V F F	V	F	V		F
F V V	V	V	V		V
F V F	V	V	F		F
F F V	F	V	V		V
F F F	F	V	V		F

A forma é válida, já que em todas as circunstâncias em que as premissas são verdadeiras, a conclusão também é verdadeira.

Para saber quantas filas tem um inspetor de circunstâncias basta contar as variáveis proposicionais. Sendo n o número de variáveis proposicionais, x é o número de filas: $2^n = x$. 2 representa o número de valores de verdade (verdadeiro e falso). Sendo $n = 2$, temos 4 filas (2×2); sendo $n = 3$, temos 8 filas ($2 \times 2 \times 2$). E assim por diante.

É possível usar inspetores de circunstâncias para testar argumentos com qualquer número de variáveis. Mas é pouco prático preencher inúmeras filas, além de terrivelmente aborrecido e inútil. Os inspetores de circunstâncias são bons instrumentos para ajudar a compreender a noção de argumento válido, pois tornam visível o significado da definição de validade dedutiva. Mas preencher inspetores com dezesseis ou trinta e duas filas é um exercício aborrecido que nada acrescenta à nossa compreensão das coisas.

Exercícios

1. Teste a validade das seguintes formas recorrendo a inspetores de circunstâncias:

   a) $P \wedge Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \vDash R$
   b) $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vDash P \rightarrow R$
   c) $P \rightleftarrows Q, Q \rightleftarrows R \vDash P \rightleftarrows R$
   d) $P \vee R \vDash Q \vee P$

e) $P \land Q, R \vDash Q \rightarrow R$
f) $P \rightarrow Q \vDash R \rightarrow Q$

2. Apresente argumentos com as formas lógicas que acabou de testar.

26. Variáveis de fórmula

Falamos até agora de variáveis proposicionais, como P, Q ou R. Mas não é difícil ver que uma forma válida, como o *modus ponens,* por exemplo, pode ser mais complexa, desde que obedeça ao mesmo padrão geral:

1. $(P \land Q) \rightarrow R$
   $P \land Q$
   Logo, R

Apesar de a antecedente da primeira premissa ser uma proposição composta, é evidente que esta forma é tão válida quanto o *modus ponens* simples. De fato, as formas válidas são configurações ou padrões de espaços vazios que podem ser preenchidos igualmente por proposições simples ou compostas.

Eis outro exemplo de um *modus ponens* complexo:

2. $\neg P \rightarrow (R \land S)$
   $\neg P$.
   Logo, $R \land S$.

Assim, é costume usar variáveis de fórmula, como A, B, C, etc., para representar as formas válidas como o *modus ponens,* o *modus tollens,* etc.

- Na lógica proposicional, uma **variável de fórmula** é um símbolo que pode ser substituído por qualquer proposição, composta ou simples.

Por isso, podemos exprimir o *modus ponens* assim:

$A \rightarrow B$.
A.
Logo, B.

No exemplo 2, $\neg P$ está no lugar de A. E no exemplo 1 é $P \land Q$ que está no lugar de A.

Exercícios

1. Identifique as seguintes formas lógicas:

a) $P \rightarrow (Q \lor R)$.
   Logo, $\neg(Q \lor R) \rightarrow \neg P$.

b) $(P \vee R) \rightarrow \neg(Q \vee P)$.
Logo, $\neg\neg(Q \vee P) \rightarrow \neg(P \vee R)$.

c) $P \rightarrow \neg Q$.
$\neg\neg Q$.
Logo, $\neg P$.

d) $\neg P \rightarrow Q$.
$\neg P$.
Logo, Q.

27. Verdades e falsidades lógicas

As tabelas de verdade permitem ver o que significa dizer que uma proposição é uma **verdade lógica** ou uma **falsidade lógica**. Chama-se por vezes tautologia às verdades lógicas; e as falsidades lógicas são contradições. Às proposições que não são verdades nem falsidades lógicas chama-se contingências lógicas. Por exemplo, a condicional "Se a vida é bela, a vida é bela" é uma verdade lógica, como podemos ver analisando a sua forma lógica:

P	**$P \rightarrow P$**
V	V
F	V

Dizer que é uma verdade lógica é dizer que é verdadeira em todas as circunstâncias. Isto contrasta com "A vida é bela", que só é verdadeira se a vida for bela, mas é falsa em caso contrário.

No caso das contradições, dá-se o inverso: são proposições falsas em todas as circunstâncias. Analisemos a forma lógica de "A vida é bela e não é bela":

P	**$P \wedge \neg P$**
V	F
F	F

Como se pode ver, trata-se de uma contradição lógica.

28. Validades surpreendentes

As verdades e falsidades lógicas dão origem a dois tipos de validades surpreendentes. Vejamos o seguinte argumento:

O livre-arbítrio é uma ilusão.
Logo, a vida é bela ou não.

O argumento é evidentemente disparatado. Contudo, é válido, como podemos verificar facilmente fazendo um inspetor de circunstâncias. Basta pensar cuidadosamente na definição de validade dedutiva para compreender que este argumento é válido, apesar de ser estranho.

Segundo a definição, é dedutivamente válido qualquer argumento em que seja impossível a premissa ser verdadeira e a conclusão falsa. Ora, a conclusão deste argumento é uma verdade lógica; por isso, nunca pode ser falsa. Mas se não pode nunca ser falsa, o argumento nunca pode ter premissas verdadeiras e conclusão falsa. Logo, é válido.

O mesmo acontece com o argumento seguinte, igualmente disparatado:

A vida é bela e não é bela.
Logo, Deus existe.

Este argumento é válido porque a sua premissa é uma falsidade lógica. Dado que é uma falsidade lógica, nunca pode ser verdadeira. Mas se nunca pode ser verdadeira, o argumento nunca poderá ter premissa verdadeira e conclusão falsa. Logo, é válido. Uma vez mais, podemos verificar a sua validade fazendo um inspetor de circunstâncias.

Em conclusão:

- Qualquer argumento cuja conclusão seja uma verdade lógica é válido.
- Qualquer argumento cuja premissa seja uma falsidade lógica é válido.

Isto significa que a validade não é, só por si, uma condição suficiente da boa argumentação. Além de válido, um argumento tem de ter premissas verdadeiras e tem de ter premissas mais plausíveis do que a conclusão. Estes aspectos são estudados na lógica informal.

29. Validades dedutivas informais

Afirmamos que os inspetores de circunstâncias só podem determinar a validade ou invalidade dos argumentos cuja validade dependa exclusivamente do uso de operadores verofuncionais. Vejamos porquê. Considere-se o seguinte argumento:

O João é casado.
Logo, o João não é solteiro.

Este argumento é evidentemente válido: é impossível a premissa ser verdadeira e a conclusão falsa. Contudo, um inspetor de circunstâncias não serve para detectar a validade deste argumento:

1. Interpretação

P: O João é casado.
Q: O João é solteiro.

2. Forma argumentativa

P.
Logo, ¬Q.

3. Inspetor de circunstâncias

P Q	P	⊨	¬Q
V V	V		F
V F	V		V
F V	F		F
F F	F		V

4. Análise

A forma argumentativa é inválida dado que há uma circunstância em que a premissa é verdadeira e a conclusão falsa.

Segundo o inspetor de circunstâncias, a forma lógica do argumento é inválida. Mas o argumento é claramente válido. O que aconteceu?

Aconteceu que o argumento é válido mas a sua validade não depende exclusivamente dos operadores verofuncionais; depende também do significado dos termos "casado" e "solteiro". Logo, não se pode determinar a sua validade recorrendo a um inspetor de circunstâncias. Trata-se de um argumento que escapa à lógica formal porque a sua validade não se pode determinar analisando apenas a sua forma lógica.