

Introdução à lógica formal proposicional

Professor Desidério Murcho
Departamento de Filosofia
Universidade Federal de Ouro Preto



Lógica proposicional clássica

- * A lógica proposicional clássica estuda a argumentação cuja validade depende exclusivamente de cinco operadores verofuncionais:
 1. Disjunção (inclusiva): **P ou Q**
 2. Conjunção: **P e Q**
 3. Negação: **não P**
 4. Condicional: **Se P, então Q**
 5. Bicondicional: **P se, e só se, Q**



Universalidade

- * Com estes cinco operadores verofuncionais podemos exprimir qualquer outro operador verofuncional
- * A disjunção exclusiva pode ser expressa negando uma bicondicional, pois as duas proposições seguintes são equivalentes:
 - * Ou Aristóteles era grego ou era romano
 - * Não é verdade que Aristóteles era grego se, e só se, era romano



Constantes lógicas

P ou Q

$P \vee Q$

P e Q

$P \wedge Q$

Não P

$\neg P$

Se P, então Q

$P \rightarrow Q$

P se, e só se, Q

$P \Leftrightarrow Q$



Constantes e variáveis

Constantes lógicas

- * $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \Leftrightarrow$
- * Estes símbolos são **constantes** porque representam sempre o mesmo: e, ou, não, se, se e só se

Variáveis proposicionais

- * P, Q, R, S, etc.
- * Estes símbolos são **variáveis proposicionais** porque representam qualquer proposição



Logiquês

- * Para estudar o raciocínio proposicional clássico vamos inventar uma linguagem simplificada
- * O objetivo é destacar o que é relevante para a validade do raciocínio, ignorando o resto
- * O logiquês é uma linguagem muitíssimo simplificada
- * O logiquês é como num mapa: nele, destacamos o que é relevante e ignoramos o resto



Lógica clássica

Os cinco operadores verofuncionais



Disjunção

- * Chama-se **disjunção** a uma proposição da forma “ $P \vee Q$ ” e **disjuntas** a P e a Q
- * Expressão canônica
 - * Platão refletiu sobre a ética **ou** Aristóteles refletiu sobre a ética
- * Outras expressões
 - * Platão **ou** Aristóteles refletiram sobre a ética
 - * **Ou** foi Platão que refletiu sobre a ética **ou** foi Aristóteles
 - * No que respeita refletir sobre a ética, a **alternativa** é entre Platão e Aristóteles



Condições de verdade da disjunção

- * Uma proposição com a forma $P \vee Q$ só é falsa se P e Q forem ambas falsas
- * Em todos os outros casos é verdadeira

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F



Conjunção

- * Chama-se **conjunção** a uma proposição da forma “ $P \wedge Q$ ”, e **conjuntas** às proposições P e Q
- * Expressão canônica:
 - * O conhecimento é estudado pela filosofia **e** a fé é estudada pela filosofia
- * Outras expressões:
 - * O conhecimento **e** a fé são estudados pela filosofia
 - * O conhecimento é estudado pela filosofia **e** a fé também
 - * **Tanto** o conhecimento **como** a fé são estudados pela filosofia
 - * A filosofia estuda **quer** o conhecimento, **quer** a fé
 - * O conhecimento é estudado pela filosofia **mas** a fé também o é



Condições de verdade da conjunção

- * Uma proposição com a forma $P \wedge Q$ só é verdadeira se P e Q forem ambas verdadeiras
- * Em todos os outros casos é falsa

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Negação

- * Chama-se **negação** a qualquer proposição da forma “ $\neg p$ ”
- * Expressão canônica
 - * O conhecimento não é possível
- * Outras expressões
 - * **Não é verdade** que o conhecimento seja possível
 - * **Não é o caso** que o conhecimento seja possível
 - * O conhecimento é **impossível**



Condições de verdade da negação

- * Uma proposição com a forma $\neg P$ só é verdadeira se P for falsa
- * E só é falsa se P for verdadeira

P	$\neg P$
V	F
F	V

Operadores unários e binários

- * A negação é o único dos cinco operadores proposicionais que se aplica a uma só proposição e não a duas
- * Um operador proposicional é **binário** quando se aplica a duas proposições e **unário** quando se aplica só a uma



Revisão

1. Considere-se a conjunção “A vida tem sentido e a felicidade é real”.
 - a) Admitindo que a vida não tem sentido, a conjunção é verdadeira ou falsa? Porquê?
 - b) Admitindo que a vida tem sentido e que não sabemos se a felicidade é real, é possível saber se a conjunção é verdadeira ou falsa? Porquê?
 - c) Admitindo que a vida tem sentido, a conjunção “A vida não tem sentido” é verdadeira ou falsa? Porquê?



Lógica clássica

Condicional clássica e os seus problemas



Condicional

- * Chama-se **condicional** a uma proposição da forma “ $P \rightarrow Q$ ”, e **antecedente** a P e **conseqüente** a Q
- * Chama-se também **implicação** à condicional



Expressando a condicional

- * Expressão canônica:
 - * **Se** há pensamento, **então** há matéria
- * Outras expressões:
 - * **Se** há pensamento, há matéria
 - * Há matéria, **se** houver pensamento
 - * Há matéria **caso** haja pensamento
 - * Não há pensamento, **a menos que** haja matéria
 - * Não há pensamento, **a não ser que** haja matéria
 - * **Sempre que** há pensamento, há matéria
 - * A matéria é uma **condição necessária** do pensamento
 - * O pensamento é uma **condição suficiente** da matéria



Condições de verdade da condicional

- * É evidente que a condicional “Se Aristóteles era grego, era africano” é falsa
- * É falsa porque a antecedente é verdadeira e a conseqüente falsa
- * Mas que dizer do valor de verdade da condicional “Se Aristóteles era português, era africano”?
- * Quase qualquer pessoa diria que esta condicional é falsa



Condições de verdade problemáticas

- * Na lógica proposicional clássica, considera-se, desde o tempo dos estóicos, que é verdadeira uma condicional como “Se Aristóteles era português, era africano”
- * Mas, intuitivamente, a condicional é falsa
- * Este é um problema em aberto, que tem provocado muitas discussões ao longo da história da filosofia
- * A lógica clássica entende as condicionais de uma maneira especial



Uma intuição que falha

- * Intuitivamente, consideramos que uma condicional como “Se Aristóteles era português, era africano” é falsa porque sabemos que se Aristóteles fosse mesmo português, não seria africano: seria europeu
- * A nossa intuição baseia-se no fato de ser falso que os portugueses sejam africanos
- * Olhamos para a condicional e vemos outra condicional: “Se alguém é português, é africano”
- * E como esta condicional é realmente falsa, pensamos que a outra condicional também é falsa



Condicional clássica

- * Na lógica clássica olha-se unicamente para o valor de verdade da antecedente e conseqüente da condicional literal
- * E considera-se que uma condicional só é literalmente falsa quando parte de uma verdade e chega a uma falsidade
- * Em todos os outros casos, a condicional é verdadeira



Definição da condicional clássica

- * Uma proposição com a forma $P \rightarrow Q$ só é falsa se P for verdadeira e Q for falsa
- * Em todos os outros casos é verdadeira

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Problemas, de novo

- * “Se a neve é branca, Platão era grego”
- * Intuitivamente, é falsa
- * Mas considera-se que é verdadeira na lógica clássica porque não tem uma antecedente verdadeira e uma conseqüente falsa



Ausência de conexão

- * “Se a neve é branca, Platão era grego”
- * Não parece verdadeira porque não há qualquer **conexão**, causal ou conceptual, entre a antecedente e a conseqüente
- * Quando afirmamos “Se P, então Q”, exprimimos muitas vezes uma conexão causal ou conceptual:
 - * “Se deixarmos cair um copo, parte-se”
 - * “Se o Asdrúbal se divorciou, já não é casado”



A dominância do valor de verdade

- * Na lógica clássica a única relação que conta entre a antecedente e a consequente é a relação entre **valores de verdade**
- * Haver ou não uma conexão qualquer, conceptual ou causal, é irrelevante

Comutatividade

- * Um operador binário é **comutativo** quando a ordem das proposições pode ser invertida sem afetar os valores de verdade

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Revisão

1. Considere-se a condicional “Se Deus existe, a vida tem sentido”
 - a) Admitindo que Deus não existe, a condicional é verdadeira ou falsa? Porquê?
 - b) Admitindo que Deus existe e que não sabemos se a vida tem sentido, é possível saber se a condicional é verdadeira ou falsa? Porquê?
 - c) Admitindo que a vida tem sentido, a condicional é verdadeira ou falsa? Porquê?



Condições suficientes e necessárias

- * Uma condição suficiente é a antecedente de uma condicional
- * Uma condição necessária é a conseqüente de uma condicional



Condições suficientes e necessárias

- * Estar em Ouro Preto é condição suficiente para estar no Brasil, mas não é necessária
- * Estar no Brasil é uma condição necessária para estar em Ouro Preto, mas não é suficiente
- * $OP \rightarrow B$, mas $\neg(B \rightarrow OP)$



Bicondicional

- * Chama-se **bicondicional** a uma proposição da forma “ $P \Leftrightarrow Q$ ”
- * Expressão canônica
 - * Uma obra é arte **se, e só se**, for a criação de um artista
- * Outras expressões
 - * Uma obra é arte **se, e somente se**, for a criação de um artista
 - * **Se** uma obra for arte, é a criação de um artista **e vice-versa**
 - * Uma **condição necessária e suficiente** para algo ser uma obra de arte é ser a criação de um artista
 - * A arte **é** a criação de um artista
 - * A criação de um artista **é** a arte



Condições de verdade da bicondicional

- * Uma proposição com a forma $P \Leftrightarrow Q$ só é verdadeira se P e Q tiverem o mesmo valor de verdade
- * Caso contrário, é falsa

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V



Bicondicional e equivalência

- * Chama-se também **equivalência** à bicondicional
- * Uma bicondicional verdadeira estabelece a equivalência de valores de verdade entre duas proposições



Bicondicional e condicional

* $P \Leftrightarrow Q$ é o mesmo que $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

Bicondicional e definição

- * As bicondicionais são especialmente importantes em filosofia, pois as definições explícitas são em geral formuladas em termos de equivalência
- * “O Homem é um animal racional”, se for entendido como uma definição de Homem, significa “Um ser é um Homem **se, e só se,** for um animal racional”
- * Ou seja: **se** um ser for um Homem, é um animal racional; **e se** for um animal racional, é um Homem

Definições rigorosas

- * Definição intuitiva usada:
 - * Um argumento é dedutivamente válido quando é impossível ter premissas verdadeiras e conclusão falsa
- * Definição rigorosa:
 - * Um argumento é dedutivamente válido **se, e só se**, é impossível ter premissas verdadeiras e conclusão falsa



Revisão

1. Considere-se a bicondicional “Deus existe se, e só se, a vida tem sentido”.
 - a) Admitindo que Deus existe e que a vida não tem sentido, a bicondicional é verdadeira ou falsa? Porquê?
 - b) Admitindo que Deus não existe e que a vida não tem sentido, a bicondicional é verdadeira ou falsa? Porquê?
 - c) Admitindo que a vida tem sentido mas que não sabemos se Deus existe, é possível saber se a bicondicional é verdadeira ou falsa? Porquê?



Formalização

* “A vida não vale a pena a menos que sejamos imortais”

1. Expressão canônica

* Se a vida vale a pena, então somos imortais.

2. Interpretação

* P: A vida vale a pena

* Q: Os seres humanos são mortais

3. Formalização

* $P \rightarrow \neg Q$



Revisão

1. Formalize as proposições expressas a seguir:
 - a) Se tudo está determinado, o livre-arbítrio é impossível.
 - b) Sempre que chove, o presidente fica eloqüente.
 - c) Não há imortais.
 - d) Ou Deus existe ou a vida não faz sentido.
 - e) O Homem é um bípede sem penas.
 - f) Nem Kant nem Hegel sabiam inglês.
 - g) Ser um artefacto não é uma condição suficiente para que algo seja uma obra de arte.



Sumário

- * A lógica formal proposicional clássica estuda os argumentos cuja validade ou invalidade depende exclusivamente dos aspectos verofuncionais de cinco operadores (negação, conjunção, disjunção, condicional, bicondicional)
- * Esse estudo procede estipulando uma linguagem simplificada

