Introdução à dedução natural proposicional

Desidério Murcho

Universidade Federal de Ouro Preto

A dedução natural é um método de demonstração introduzido independentemente por Gerhard Gentzen em 1935 e Stanislaw Jaskowski em 1934. Os sistemas de dedução natural caracterizam-se, entre outros aspectos, por não apresentarem um conjunto de axiomas e regras de inferência, mas apenas um conjunto de regras que regulam a introdução e a eliminação dos operadores proposicionais, dos quantificadores e do operador de identidade. Neste artigo apresenta-se um conjunto de regras primitivas de dedução natural. Os vários sistemas hoje existentes diferem ligeiramente em algumas regras mais subtis. Neste artigo apresenta-se a versão de Newton-Smith (1985).

Na apresentação das regras irá usar-se as letras A, B, C como variáveis de fórmula e p, q, r como variáveis proposicionais. Isto significa que $A \rightarrow B$ representa qualquer proposição que tenha a forma de uma condicional. $p \rightarrow q$ tem a forma de uma condicional e é uma dessas fórmulas; mas $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee (p \wedge q))$ também tem a forma de uma condicional e, consequentemente, também é uma dessas fórmulas.

As regras da lógica são formas argumentativas válidas. Uma demonstração ou derivação é uma maneira de estabelecer a validade de uma forma argumentativa mais complexa, o que se consegue mostrando que se pode chegar à conclusão desejada partindo das premissas em causa e usando apenas as regras dadas.

Eliminação da Conjunção (E∧)

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

Dada uma linha da forma $A \wedge B$, tanto podemos inferir A como B. O resultado depende de $A \wedge B$, caso esta linha seja uma premissa ou uma suposição. Caso contrário depende das mesmas premissas ou suposições de que $A \wedge B$ depender.

Eis um argumento válido simples que tem a forma desta regra: «Sócrates e Platão eram gregos; logo, Sócrates era grego». Eis um exemplo da aplicação da regra numa derivação:

Prem	(1)	$p \wedge q$	
1	(2)	p	1 E$\wedge$

As demonstrações são constituídas por 4 colunas. Na coluna 1 (a coluna das dependências) exibem-se as dependências lógicas. Se o passo em causa for uma premissa escreve-se «Prem», se for uma suposição escreve-se «Sup». Caso contrário terá de se escrever o número da premissa ou suposição da qual esse passo depende (caso dependa de alguma). A coluna 1 é também conhecida como coluna do cálculo do conjunto de premissas. Nos sistemas de dedução natural puros exige-se que as derivações exibam, em cada passo, as premissas das quais esse passo depende.

A diferença entre premissas e suposições é a seguinte: muitas vezes, no decurso de uma derivação, é necessário introduzir fórmulas a título hipotético, as quais serão, a seu tempo, eliminadas. Chama-se *suposições* (ou hipóteses adicionais) a estas fórmulas.

Na coluna 2 numera-se os passos da derivação. É a coluna da numeração.

Na coluna 3 exibe-se o resultado do raciocínio: é nesta coluna que se apresentam as fórmulas que estão a ser manipuladas. É a coluna do raciocínio.

Na coluna 4 justifica-se o raciocínio apresentado na coluna 3. É a coluna da justificação. No exemplo dado, indica-se no passo 2 o passo a que se aplica a regra (1) e indica-se a regra aplicada (E$\wedge$).

Introdução da Conjunção (I$\wedge$)

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \wedge B} \qquad \frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{B \wedge A}$$

Dada uma linha da forma A e outra linha da forma B, tanto se pode inferir $A \wedge B$ como $B \wedge A$. O resultado depende de A e de B (caso sejam premissas ou suposições) ou das premissas ou suposições de que A e B dependerem.

Eis um argumento válido simples com esta forma: «Platão era grego; Aristóteles era grego; logo, Platão e Aristóteles eram gregos». Um exemplo da aplicação da regra numa derivação é o seguinte:

Prem	(1)	p
Prem	(2)	q

1,2	(3)	$p \wedge q$	1,2 I$\wedge$

Na coluna 4, a coluna da justificação, indica-se o número das linhas a que se aplica a regra (1 e 2) e indica-se a regra aplicada (E$\wedge$).

Esta regra permite usar duas vezes o mesmo passo:

Prem	(1)	p	
1	(2)	$p \wedge p$	1,1 I$\wedge$

Eliminação da Negação (E¬)
(Negação dupla)

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Dada uma linha da forma ¬¬A pode-se inferir A. A conclusão ficará a depender de ¬¬A (se for uma premissa ou uma suposição) ou das premissas ou suposições de que ¬¬A depender:

Prem	(1)	$\neg\neg p$	
1	(2)	p	1 E¬

Justifica-se o raciocínio na coluna 4, indicando que se usou a regra E¬ sobre o passo 1.

Os intuicionistas recusam esta regra, por acharem que nem sempre se pode concluir que Pedro é corajoso só porque ele nunca mostrou que não o era.

Introdução da Negação (I¬)
(Redução ao absurdo)

$$\frac{A \vdash B \wedge \neg B}{\neg A}$$

Dada uma linha da forma B ∧ ¬B que dependa de uma suposição A, pode-se concluir ¬A. A conclusão não depende de A; depende apenas das outras premissas ou suposições de que B ∧ ¬B eventualmente depender.

A ideia é que se no decorrer de um raciocínio se chegar a uma contradição, pode-se negar qualquer das premissas responsável por essa contradição.

Por exemplo, pode-se derivar o sequente $p \rightarrow q \vdash \neg(p \wedge \neg q)$ do seguinte modo:

Prem	(1)	$p \rightarrow q$	
Sup	(2)	$p \wedge \neg q$	
2	(3)	p	2 E∧
1,2	(4)	q	1,3 E→
2	(5)	$\neg q$	2 E∧
1,2	(6)	$q \wedge \neg q$	4,5 I∧
1	(7)	$\neg(p \wedge \neg q)$	2,6 I¬

A justificação do raciocínio do passo 7 esclarece que se negou a fórmula do passo 2 com base na contradição deduzida no passo 6.

Este estilo de raciocínio é conhecido desde a antiguidade clássica e recebeu o nome definitivo na idade média: *reductio ad absurdum*. Eis um exemplo: «Quem não tem deveres não tem direitos; os bebés não têm deveres; logo, não têm direitos; mas os bebés têm direitos; logo, é falso que quem não tem deveres não tem direitos».

Quando se chega a uma contradição num sistema axiomático pode-se negar qualquer uma das fórmulas anteriores. No sistema de Newton-Smith (mas não noutros sistemas de dedução natural), só se pode negar aquela suposição da qual a contradição depende. Considere-se a seguinte derivação:

Prem	(1)	p	
Prem	(2)	$\neg p$	
Sup	(3)	$\neg q$	
1,2	(4)	$p \wedge \neg p$	1,2 I∧
1,2	(5)	$\neg\neg q$	3,4 I¬

No sistema de Newton-Smith o passo 5 está errado porque usa a contradição do passo 4 para negar uma fórmula (3) que não dependia dessa contradição. No entanto, uma derivação análoga a esta é correcta num sistema axiomático e noutros sistemas de dedução natural. A diferença é um mero pormenor técnico. No sistema de Newton-Smith a derivação correcta de $p, \neg p \vdash q$ é a seguinte:

Prem	(1)	p	
Prem	(2)	¬p	
Sup	(3)	¬q	
1,2	(4)	p ∧ ¬p	1,2 I∧
1,2,3	(5)	(p ∧ ¬p) ∧ ¬q	3,4 I∧
1,2,3	(6)	p ∧ ¬p	5 E∧
1,2	(7)	¬¬q	3,6 I¬
1,2	(8)	q	7 E¬

Muitos sistemas de lógica não exigem que o passo a negar, ao encontrar uma contradição, dependa dessa contradição. Isto acontece porque a introdução e a eliminação da conjunção permite sempre fazer depender qualquer passo de uma derivação de qualquer outro. No entanto, esta exigência permite explicitar o que de outro modo fica apenas implícito.

À excepção das premissas e suposições, no sistema de Newton-Smith, cada passo de uma derivação representa um sequente válido. Na derivação anterior o passo 4 representa o sequente $p, \neg p \vdash p \wedge \neg p$. O passo 7 representa o sequente $p, \neg p \vdash \neg\neg q$.

Eliminação da Condicional (E→)
(*Modus ponens*)

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

Dada uma linha da forma A → B e outra da forma A, pode-se inferir B. A conclusão depende das mesmas premissas e suposições de que A e A → B dependerem, ou delas mesmas, caso se trate de premissas ou suposições.

Um exemplo de *modus ponens* é o seguinte: «Se Deus existe, a vida é sagrada; Deus existe, logo, a vida é sagrada».

Eis um exemplo da aplicação da regra:

Prem	(1)	p	
Prem	(2)	p → q	
1,2	(3)	q	1,2 E→

Na coluna da justificação invoca-se as duas premissas usadas e cita-se a regra.

Introdução da Condicional (I→)

$$\frac{A \vdash B}{A \to B}$$

Dada uma linha de uma derivação que dependa de uma suposição A e afirme B, pode-se inferir A → B. A conclusão não depende de A mas apenas de B (ou das premissas de que B depende).

A ideia é que se a inferência «A neve é branca; logo, tem cor» for válida, podemos concluir: «Se a neve é branca, tem cor».

Por exemplo:

Prem	(1)	q	
Sup	(2)	p	
1,2	(3)	p ∧ q	1,2 I∧
1	(4)	p → (p ∧ q)	2,3 I→

Dado que o passo 3 depende de 2, pode-se concluir que a fórmula do passo 2 implica a fórmula do passo 3. A nova fórmula já não depende de 2, mas apenas de 1.

Esta regra é muito usada nas derivações cuja conclusão é uma condicional. O sequente demonstrado é o seguinte: $q \vdash p \to (p \land q)$. A conclusão do sequente é uma condicional cuja antecedente foi introduzida na derivação anterior como uma suposição que depois se eliminou através da regra I→.

Eliminação da Disjunção (E$\vee$)
(Dilema)

$$\frac{\begin{array}{c} A \vee B \\ A \vdash C \\ B \vdash C \end{array}}{C}$$

Dada uma fórmula da forma A $\vee$ B, podemos concluir C, caso C se derive independentemente de A e de B. A conclusão C dependerá unicamente de A $\vee$ B e de quaisquer outras premissas usadas nas duas demonstrações de C, excepto de A e de B.

Um exemplo de dilema: «Ou Deus existe, ou não existe. Se existe, não se pode torturar crianças por prazer. Mas se não existe, não se pode igualmente torturar crianças por prazer. Logo, em qualquer caso, não se pode torturar crianças por prazer».

É útil usar dispositivos visuais (enquadramentos) que ajudem a perceber e a controlar as derivações que usam esta regra:

Prem	(1)	$(p \wedge q) \vee (q \wedge r)$	
Sup	(2)	$p \wedge q$	
2	(3)	q	2, E$\wedge$
Sup	(4)	$q \wedge r$	
4	(5)	q	4, E$\wedge$
1	(6)	q	1,2,3,4,5 E$\vee$

O passo 6 justifica-se com base no facto de a disjunção do passo 1 possibilitar as duas subderivações, 2-3 e 4-5. Na coluna das dependências regista-se as suposições e premissas das quais 1, 3 e 5 dependem, excepto 2 e 4. Neste caso, depende apenas de 1. Mas se o passo 5, por exemplo, dependesse de outra premissa, *n*, além de 4, o passo 6 ficaria a depender de 1 e de *n*.

Os enquadramentos mostram claramente que as duas derivações de *q* são independentes: na coluna das dependências de 5 não pode surgir a suposição 2. Esta restrição significa que a segunda derivação de *q* não pode depender da suposição 2. Por outro lado, tanto 3 como 5 têm de depender das duas suposições respectivas. Isto significa que, como afirma a regra, *q* deriva de $p \wedge q$ e deriva também de $q \wedge r$.

Introdução da Disjunção (I∨)

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{A}{B \vee A}$$

Dada uma fórmula da forma A, tanto se infere A ∨ B como B ∨ A. A conclusão depende unicamente de A, caso se trate de uma premissa ou suposição, ou das premissas ou suposições das quais A depender, caso contrário. A disjunção usada é inclusiva, como é habitual na lógica. Eis um exemplo da sua aplicação:

Prem	(1)	p	
1	(2)	p ∨ q	1 I∨

Eliminação da Bicondicional (E↔)

$$\frac{A \leftrightarrow B}{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)}$$

Dada uma fórmula da forma A ↔ B infere-se (A → B) ∧ (B → A). A conclusão depende de A ↔ B ou das premissas ou suposições de que A ↔ B depender:

Prem	(1)	p ↔ q	
1	(2)	(p → q) ∧ (q → p)	1 E↔

O seguinte argumento válido é um caso particular desta forma: «Um ser é um Homem se, e só se, for racional; logo, se um ser for um Homem, é racional, e se for racional, é um Homem».

Introdução da Bicondicional (I↔)

$$\frac{\begin{array}{c}A \rightarrow B\\ B \rightarrow A\end{array}}{A \leftrightarrow B} \qquad \frac{\begin{array}{c}A \rightarrow B\\ B \rightarrow A\end{array}}{B \leftrightarrow A}$$

Dada uma fórmula da forma A → B e outra da forma B → A, infere-se A ↔ B ou B ↔ A. A conclusão depende das duas fórmulas referidas, ou das premissas ou suposições de que elas dependerem:

Prem	(1)	$p \rightarrow q$	
Prem	(2)	$q \rightarrow p$	
1,2	(3)	$p \leftrightarrow q$	1,2 I↔

O seguinte argumento válido é um caso particular desta forma: «Se um ser for um Homem, é racional; e se for racional, é um Homem; logo, um ser é um Homem se, e só se, for racional».

Referência

Newton-Smith, W. H. (1985) *Lógica: Um Curso Introdutório*. Trad. D. Murcho. Lisboa: Gradiva