

## Lógica II

### Exercícios resolvidos de lógica modal proposicional

Por Matheus Silva

Professor Desidério Murcho  
 Universidade Federal de Ouro Preto  
 Departamento de Filosofia

A) 1-  $P \rightarrow \Box P, P \vdash \neg \Diamond \neg P$

$P \rightarrow \Box P$	0
$P$	0
$\neg \Diamond \neg P$	0
$\Diamond \neg P$	0
$\wedge$ $\backslash \neg P \quad \Box P$	
$0 \sim 1$	
$\neg P$	1
$P //$	1

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

2-  $P \rightarrow \Diamond P, \Box \neg P \vdash \neg P$

$P \rightarrow \Diamond P$	0
$\Box \neg P$	0
$\neg \neg P$	0
$\wedge$ $\backslash \neg P \quad \Diamond P$	
$0 \sim 1$	
$P$	1
$\neg P //$	1

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

3-  $\Box(P \rightarrow Q) \wedge \Box(Q \rightarrow R) \vdash \Box(P \rightarrow R)$

$\Box(P \rightarrow Q) \wedge \Box(Q \rightarrow R)$	0
$\neg \Box(P \rightarrow R)$	0
$\Box(P \rightarrow R)$	0
$\Diamond \neg(P \rightarrow R)$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$\neg(P \rightarrow R)$	1
$P$	1
$\neg R$	1
$P \rightarrow Q$	1
$Q \rightarrow R$	1
$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \neg P \quad Q \end{array}$	1
$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \neg Q \quad R // \end{array}$	1

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

4 -  $\Diamond(P \wedge Q) \vdash \Diamond P \wedge \Diamond Q$

$\Diamond(P \wedge Q)$	0
$\neg(\Diamond P \wedge \Diamond Q)$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$P \wedge Q$	1
$P$	1
$Q$	1
$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \neg \Diamond P \quad \neg \Diamond Q \end{array}$	0
$\begin{array}{c}   \quad   \\ \Box \neg P \quad \Box \neg Q \end{array}$	0
$\begin{array}{c}   \quad   \\ \neg \neg P \quad \neg \neg Q // \end{array}$	1

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

5 -  $\Diamond(P \vee Q) \vdash \Diamond P \vee \Diamond Q$

$\Diamond(P \vee Q)$	0
$\neg(\Diamond P \vee \Diamond Q)$	0
$\neg\Diamond P$	0
$\neg\Diamond Q$	0
$\Box\neg P$	0
$\Box\neg Q$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$P \vee Q$	1
$\begin{array}{c} \wedge \\ P \quad Q \end{array}$	1
$\backslash\neg P \quad \neg P$	
$\begin{array}{c} \neg Q // \\ \end{array}$	1

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

6 -  $\Box(P \wedge Q) \vdash \Box P \wedge \Box Q$

$\Box(P \wedge Q)$	0
$\neg(\Box P \wedge \Box Q)$	0
$\begin{array}{c} \wedge \\ \neg\Box P \quad \neg\Box Q \end{array}$	0
$\Diamond\neg P$	0
$\Diamond\neg Q$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	0
$\neg P$	1
$\neg Q$	1
$P \wedge Q$	1
$\Box P$	1
$\Box Q$	1

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

7 -  $\Box(P \vee Q) \vdash \Box P \vee \Box Q$

$\Box(P \vee Q)$	0
$\neg(\Box P \vee \Box Q)$	0
$\neg\Box P$	0
$\neg\Box Q$	0
$\Diamond\neg P$	0
$\Diamond\neg Q$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$\neg P$	1
$0 \rightsquigarrow 2$	
$\neg Q$	2
$\wedge$	
$\backslash\backslash P$	
$Q$	1
$\wedge$	
$P$	
$Q//$	2

A forma argumentativa é inválida, pois alguns ramos da árvore semântica não fecham.

8 -  $\Box(P \vee \neg P) \vdash \Box P \vee \Box \neg P$

$\Box(P \vee \neg P)$	0
$\neg(\Box P \vee \Box \neg P)$	0
$\neg\Box P$	0
$\neg\Box \neg P$	0
$\Diamond\neg P$	0
$\Diamond P$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$\neg P$	1
$0 \rightsquigarrow 2$	
$P$	2
$P \vee \neg P$	1
$\wedge$	
$\backslash\backslash P$	
$\neg P$	1
$P \vee \neg P$	2
$\wedge$	
$P$	
$\neg P//$	2

A forma argumentativa é inválida, pois alguns ramos da árvore semântica não fecham.

9 -  $\Box P \wedge \Box Q \vdash \Box(P \wedge Q)$

$\Box P \wedge \Box Q$	0
$\neg \Box(P \wedge Q)$	0
$\Diamond \neg(P \wedge Q)$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$\neg(P \wedge Q)$	1
$\Box P$	0
$\Box Q$	0
$P$	1
$Q$	1
$\wedge$	
$\Box \neg P$	1
$\neg Q$	1

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

10 -  $\Box P \vee \Box Q \vdash \Box(P \vee Q)$

$\Box P \vee \Box Q$	0
$\neg \Box(P \vee Q)$	0
$\Diamond \neg(P \vee Q)$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$\neg(P \vee Q)$	1
$\neg P$	1
$\neg Q$	1
$\wedge$	
$\Box P$	0
$\Box Q$	0
$\Box \neg P$	1
$Q$	1

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

11 -  $\Box P \vdash \neg \Diamond \neg P$

$\Box P$	0
$\neg \neg \Diamond \neg P$	0
$\Diamond \neg P$	
$0 \rightsquigarrow 1$	1
$\neg P$	1
$P //$	1

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

12 -  $\neg \Diamond \neg P \vdash \Box P$

$\neg \Diamond \neg P$	0
$\neg \Box P$	0
$\Diamond \neg P$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$\neg P$	1
$\Box P$	0
$P //$	1

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

13 -  $\Diamond P \vdash \neg \Box \neg P$

$\Diamond P$	0
$\neg \neg \Box \neg P$	0
$\Box \neg P$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$P$	1
$\neg P //$	1

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

14 -  $\neg \Box \neg P \vdash \Diamond P$

$\neg \Box \neg P$	0
$\neg \Diamond P$	0
$\Box \neg P$	0
$\Diamond P$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$P$	1
$\neg P //$	1

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

15 -  $\Box(P \rightarrow Q) \vdash \Diamond P \rightarrow \Diamond Q$

$\Box(P \rightarrow Q)$	0
$\neg(\Diamond P \rightarrow \Diamond Q)$	0
$\Diamond P$	0
$\neg \Diamond Q$	0
$\Box \neg Q$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$P$	1
$\neg Q$	1
$P \rightarrow Q$	1
$\bigwedge$	
$\Box \neg P \quad \Box Q //$	1

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

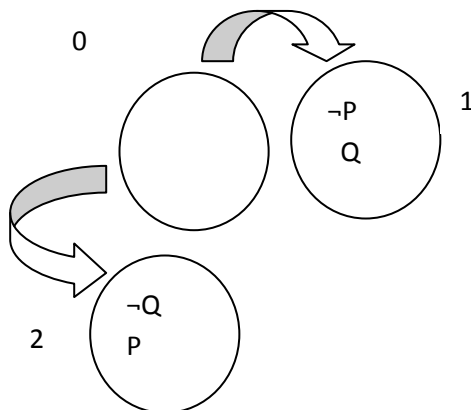
16 -  $\Box P, \Diamond Q \vdash \Diamond(P \wedge Q)$

$\Box P$	0
$\Diamond Q$	0
$\neg \Diamond(P \wedge Q)$	0
$\Box \neg(P \wedge Q)$	0
$0 \sim 1$	
$Q$	1
$P$	1
$\neg(P \wedge Q)$	1
$\wedge$	
$\Box \neg P \quad \Box \neg Q$	1

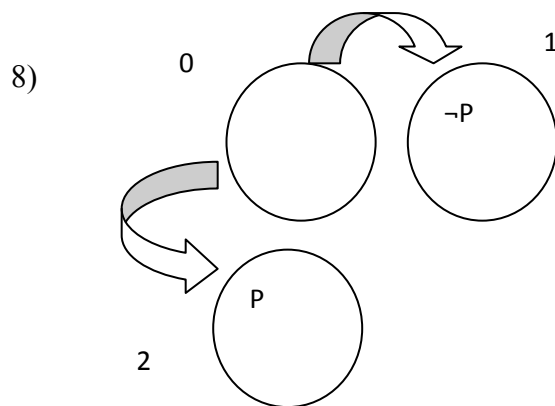
A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

### Contra-modelos

7)



A premissa da nossa forma argumentativa é verdadeira no modelo, pois em todos os mundos acessíveis a partir do mundo atual a proposição  $P \vee Q$  é verdadeira, mas a conclusão é falsa já que nem  $P$  é verdadeira em todos os mundos possíveis a partir do atual, nem  $Q$  é verdadeira em todos os mundos possíveis acessíveis a partir do atual.



A premissa de nossa forma argumentativa é verdadeira no modelo, pois a proposição  $P \vee \neg P$  é verdadeira em todos os mundos possíveis acessíveis a partir do mundo atual, mas a conclusão é falsa já que nem  $P$  é verdadeira em todos os mundos possíveis acessíveis a partir do atual, nem  $\neg P$ .

B) 17-  $\Box P \vdash P$

$\Box P$	0
$\neg P$	0
$0 \sim 0$	[R]
$P //$	0

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

18 -  $P \vdash \Diamond P$

$P$	0
$\neg \Diamond P$	0
$\Box \neg P$	0
$0 \sim 0$	[R]
$\neg P //$	0

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

19 -  $P \vdash \Box \Diamond P$

$P$	0
$\neg \Box \Diamond P$	0
$\Diamond \Box \neg P$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$\Box \neg P$	1
$1 \rightsquigarrow 0$	[S]
$\neg P //$	0

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

20 -  $\Diamond \Box P \vdash P$

$\Diamond \Box P$	0
$\neg P$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$\Box P$	1
$1 \rightsquigarrow 0$	[S]
$P //$	0

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

21-  $\Box P \vdash \Box \Box P$

$\Box P$	0
$\neg \Box \Box P$	0
$\Diamond \Diamond \neg P$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$\Diamond \neg P$	1
$1 \rightsquigarrow 2$	
$\neg P$	2
$0 \rightsquigarrow 2$	[T]
$P //$	2

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

22 -  $\diamond\diamond P \vdash \diamond P$

$\diamond\diamond P$	0
$\neg\diamond P$	0
$\Box\neg P$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$\diamond P$	1
$1 \rightsquigarrow 2$	
$P$	2
$0 \rightsquigarrow 2$	[T]
$\neg P //$	2

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

23 -  $\diamond P \vdash \Box\diamond P$

$\diamond P$	0
$\neg\Box\diamond P$	0
$\diamond\Box\neg P$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$\Box\neg P$	1
$1 \rightsquigarrow 0$	[S]
$0 \rightsquigarrow 2$	
$P$	2
$1 \rightsquigarrow 2$	[T]
$\neg P //$	2

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

24 -  $\Diamond\Box P \vdash \Box P$

$\Diamond\Box P$	0
$\neg\Box P$	0
$\Diamond\neg P$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$\Box P$	1
$0 \rightsquigarrow 2$	
$\neg P$	2
$1 \rightsquigarrow 0$	[S]
$1 \rightsquigarrow 2$	[T]
P//	2

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

25 -  $\Diamond P \vdash \Diamond\Diamond P$

$\Diamond P$	0
$\neg\Diamond\Diamond P$	0
$\Box\Box\neg P$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
P	1
$\Box\neg P$	1
$1 \rightsquigarrow 1$	[R]
$\neg P//$	1

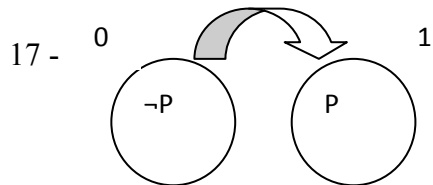
A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

26 -  $\Box P \vdash \Diamond P$

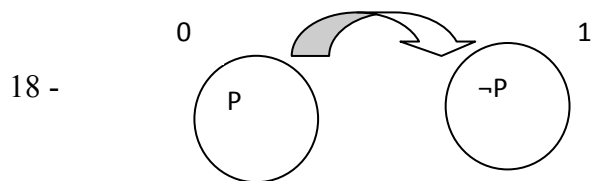
$\Box P$	0
$\neg\Diamond P$	0
$\Box\neg P$	0
$0 \rightsquigarrow 0$	[R]
P	0
$\neg P//$	0

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

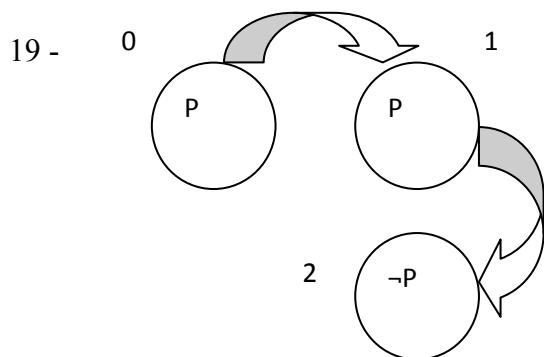
C) Contra-modelos das formas argumentativas do exercício B



A premissa da nossa forma argumentativa é verdadeira no modelo, pois em todos os mundos acessíveis a partir do mundo atual a proposição P é verdadeira, mas a conclusão é falsa já que a proposição P não é verdadeira no mundo atual.

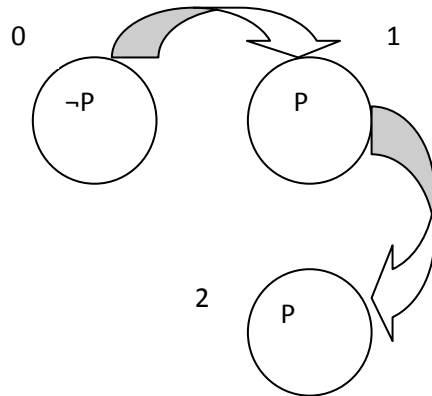


A premissa da nossa forma argumentativa é verdadeira no modelo, pois a proposição P é uma verdade no mundo atual, mas a conclusão é falsa uma vez que no único mundo acessível a partir do mundo atual a proposição P é falsa.



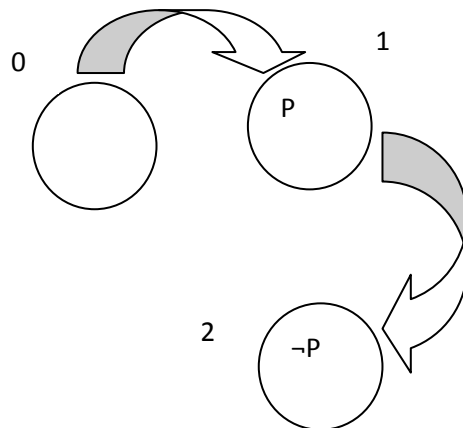
A premissa de nossa forma argumentativa é verdadeira, pois a proposição P é verdadeira no mundo atual, mas a conclusão é falsa já que P não é possível no mundo possível 1, que é acessível a partir do mundo atual.

20 -



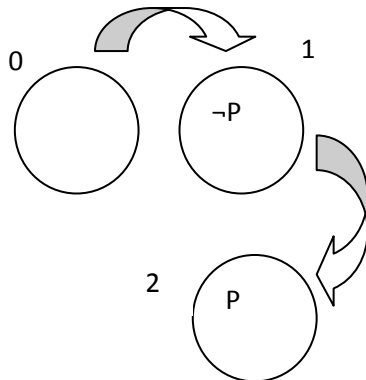
A premissa de nossa forma argumentativa é verdadeira, pois a proposição  $P$  é uma verdade necessária no mundo 1, e por isso é possível em 0 que  $P$  seja necessária. Mas a conclusão é falsa: no mundo atual,  $P$  é falsa.

21 -



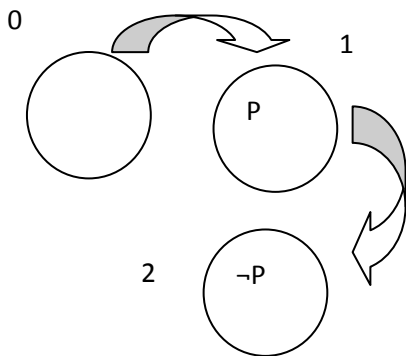
A premissa de nossa forma argumentativa é verdadeira no modelo, pois a proposição  $P$  é verdadeira em todos os mundos acessíveis a partir do mundo atual, mas a conclusão é falsa já que a proposição  $P$  não é uma verdade necessária no mundo possível 1.

22 -

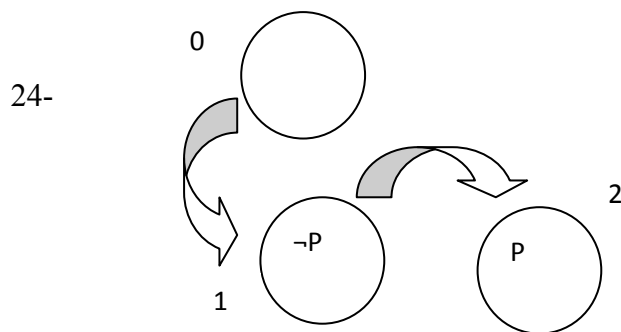


A premissa de nossa forma argumentativa é verdadeira no modelo, pois a proposição  $P$  é possível no mundo possível 1, que é acessível a partir do mundo atual. Mas a conclusão é falsa, pois  $P$  não é verdadeira em nenhum mundo possível acessível a partir do mundo atual.

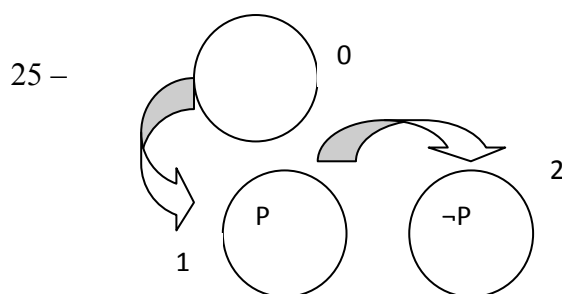
23 -



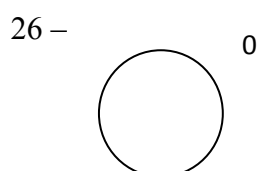
A premissa de nossa forma argumentativa é verdadeira no modelo, pois a proposição  $P$  é verdadeira no mundo possível 1, que é acessível a partir do mundo atual; mas a conclusão é falsa, já que  $P$  não é possível no mundo possível 1, que é acessível a partir do mundo atual.



A premissa de nossa forma argumentativa é verdadeira no modelo, pois há um mundo possível acessível a partir do atual no qual  $P$  é uma verdade necessária. Mas a conclusão é falsa, pois  $P$  não é verdadeira no mundo possível 1, que é acessível a partir do mundo atual.



A premissa de nossa forma argumentativa é verdadeira no modelo, pois a proposição  $P$  é verdadeira no mundo possível 1, que é acessível a partir do mundo atual; mas a conclusão é falsa já que  $P$  não é uma verdade possível no único mundo possível acessível a partir do mundo atual: o mundo possível 1.



A premissa de nossa forma argumentativa é vacuamente verdadeira no modelo, pois não há qualquer mundo possível acessível a partir do mundo atual em que  $P$  seja falsa; mas a conclusão é falsa, já que não há também qualquer mundo possível acessível a partir do atual em que  $P$  seja verdadeira.

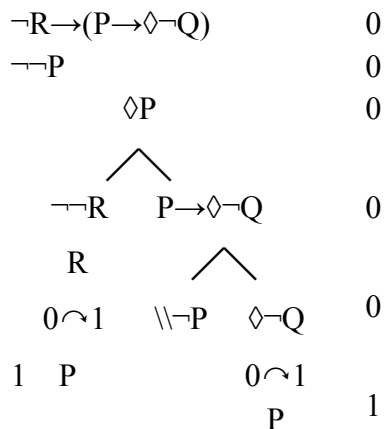
D) 27 – Interpretação:

P: Deus dá sentido à vida

Q: a vida tem sentido

R: Deus existe

Formalização:  $\neg R \rightarrow (P \rightarrow \diamond \neg Q) \vdash \neg \diamond P$



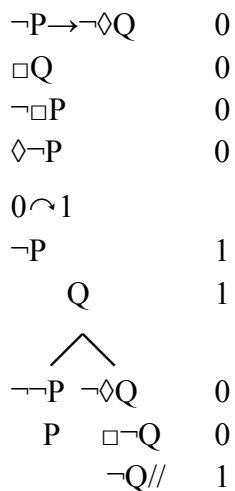
A forma argumentativa é inválida, pois alguns ramos da árvore semântica não fecham.

28 - Interpretação:

P: Deus existe

Q: a vida tem sentido

Formalização:  $\neg P \rightarrow \neg \diamond Q, \Box Q \vdash \Box P$



A forma argumentativa é inválida, pois alguns ramos da árvore semântica não fecham.

29 – Interpretação:

P: Deus existe

Formalização:  $\Diamond \Box P \vdash P$

$\Diamond \Box P$	0
$\neg P$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
$\Box P$	1
$1 \rightsquigarrow 0$	[S]
$P //$	0

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

30 – Interpretação:

P: Deus existe

Formalização:  $\Diamond P, P \rightarrow \Box P \vdash P$

$\Diamond P$	0
$P \rightarrow \Box P$	0
$\neg P$	0
$0 \rightsquigarrow 1$	
P	1
$\wedge$	
$\Box \neg P$	0
P	1

A forma argumentativa é inválida, pois alguns ramos da árvore semântica não fecham.

31- Interpretação:

P: Descartes pensa  
 Q: Descartes existe

Formalização:  $\neg\Diamond(P \wedge \neg Q), P \vdash Q$

$\neg\Diamond(P \wedge \neg Q)$	0
P	0
$\neg Q$	0
$\Box\neg(P \wedge \neg Q)$	0
$0 \sim 0$	[R]
$\neg(P \wedge \neg Q)$	0
$\wedge$ $\backslash \neg P \quad \neg \neg Q$	0
$Q //$	0

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.