

## Lógica II

### Exercícios resolvidos de árvores semânticas

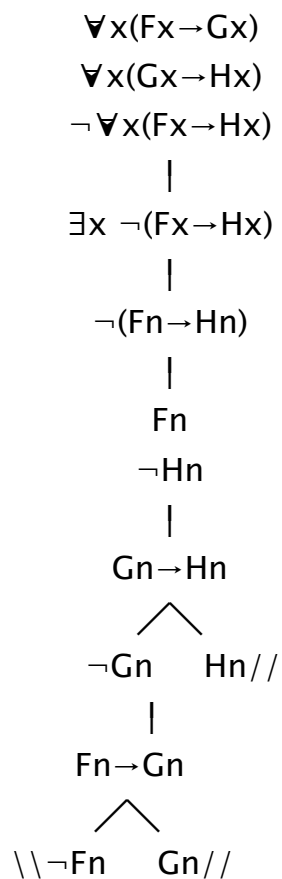
Por Matheus Silva

Professor Desidério Murcho  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Departamento de Filosofia

### Lógica, de Newton-Smith, Capítulo 5

Página 154

1) a -  $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Gx \rightarrow Hx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow Hx)$



A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

b -  $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \neg \exists x(\neg Gx \wedge Fx)$

$$\begin{array}{c}
 \forall x(Fx \rightarrow Gx) \\
 \neg \neg \exists x(\neg Gx \wedge Fx) \\
 | \\
 \exists x(\neg Gx \wedge Fx) \\
 | \\
 \neg Gn \wedge Fn \\
 | \\
 \neg Gn \\
 Fn \\
 | \\
 Fn \rightarrow Gn \\
 \wedge \\
 \backslash \neg Fn \quad Gn //
 \end{array}$$

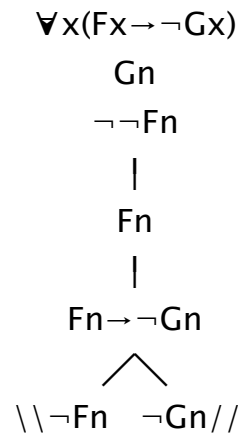
A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

c -  $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \neg Gn \vdash \neg Fn$

$$\begin{array}{c}
 \forall x(Fx \rightarrow Gx) \\
 \neg Gn \\
 \neg \neg Fn \\
 | \\
 Fn \\
 | \\
 Fn \rightarrow Gn \\
 \wedge \\
 \backslash \neg Fn \quad Gn //
 \end{array}$$

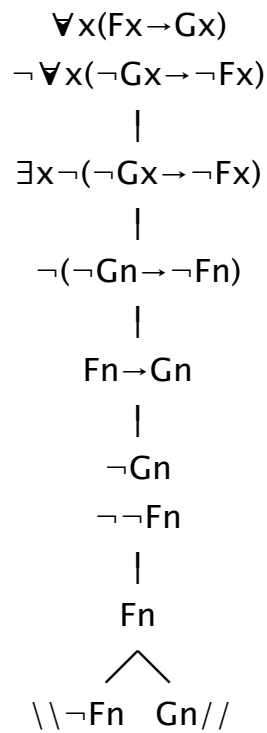
A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

d -  $\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx), Gn \vdash \neg Fn$



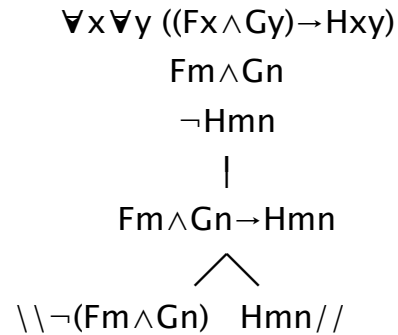
A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

e -  $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$



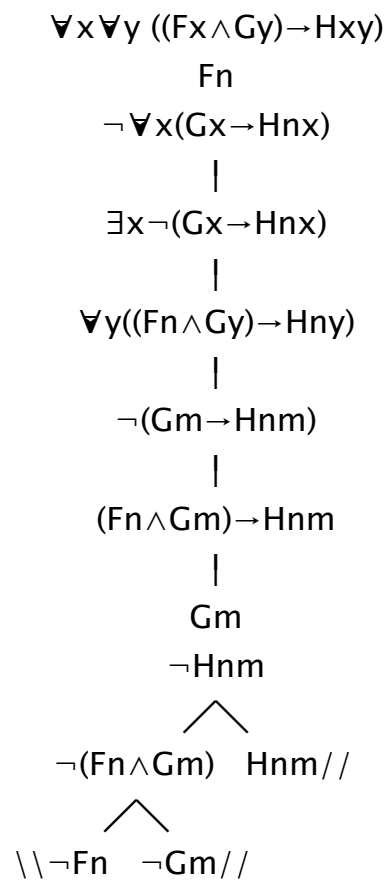
A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

f -  $\forall x \forall y ((Fx \wedge Gy) \rightarrow Hxy), Fm \wedge Gn \vdash Hmn$



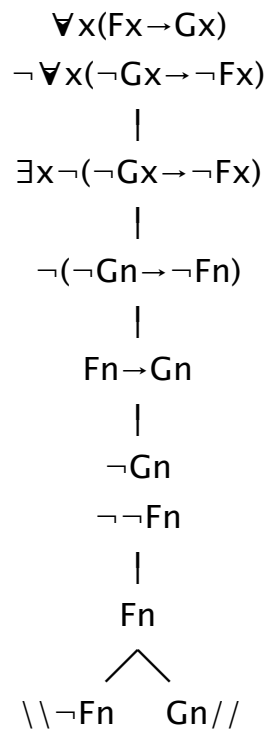
A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

g -  $\forall x \forall y ((Fx \wedge Gy) \rightarrow Hxy), Fn \vdash \forall x (Gx \rightarrow Hnx)$

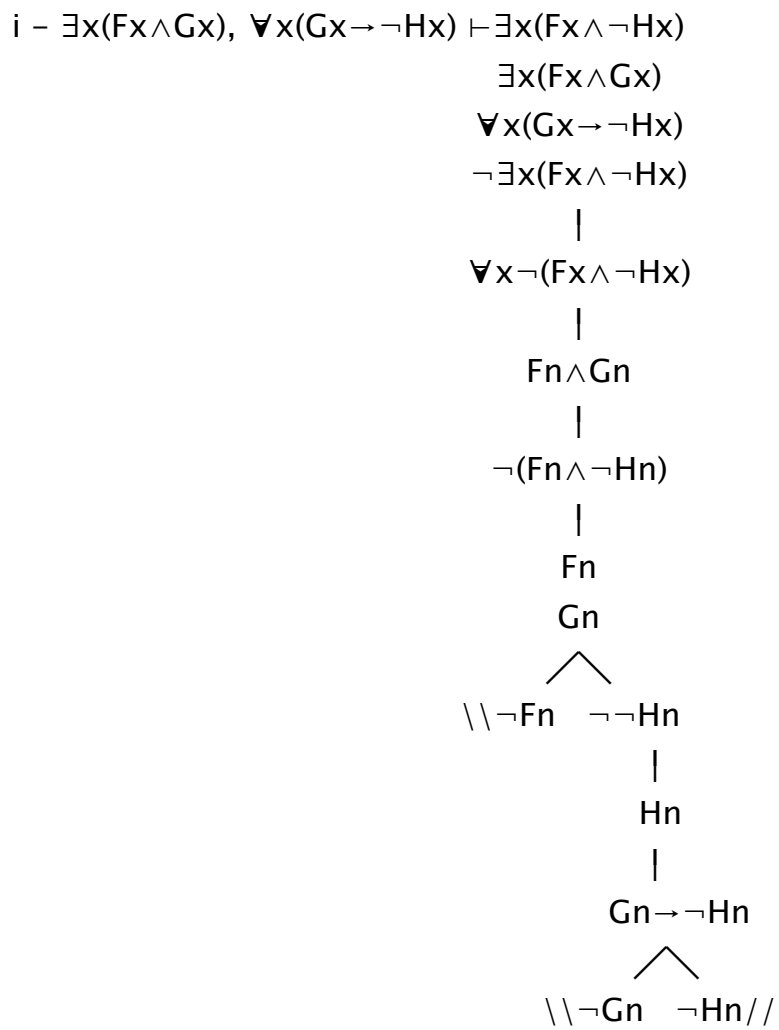


A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

$h - \forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$

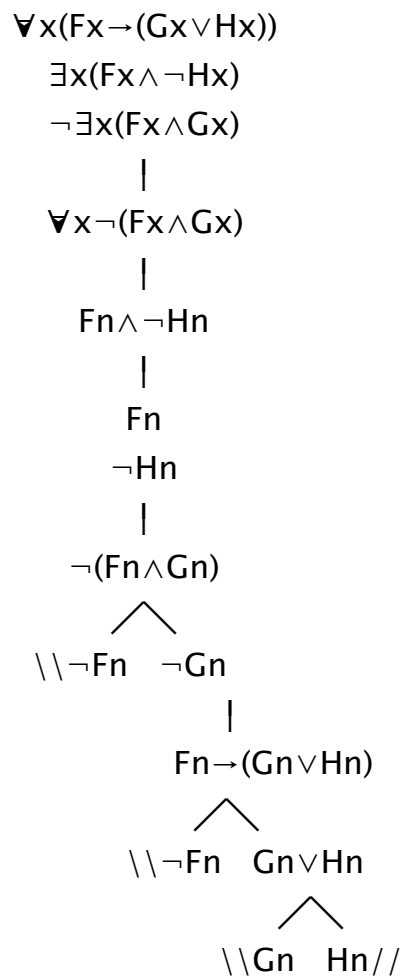


A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.



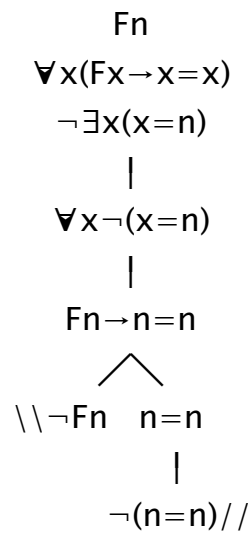
A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

j -  $\forall x(Fx \rightarrow (Gx \vee Hx)), \exists x(Fx \wedge \neg Hx) \vdash \exists x(Fx \wedge Gx)$



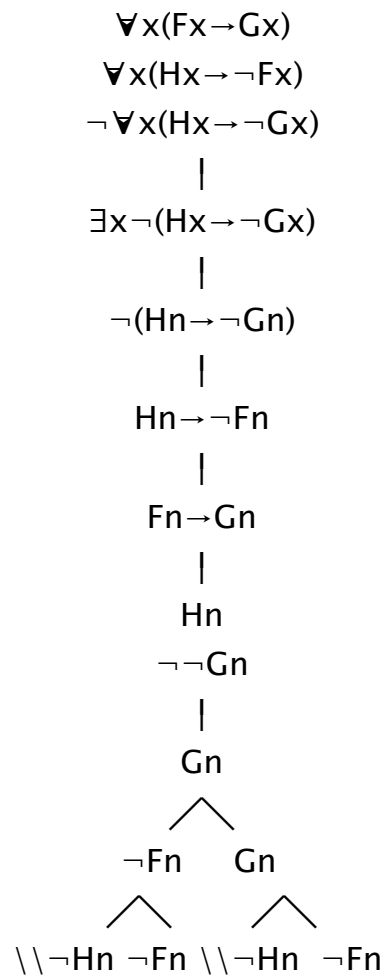
A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

k-  $F_n, \forall x(Fx \rightarrow x=x) \vdash \exists x(x=n)$



A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

l -  $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Hx \rightarrow \neg Fx) \vdash \forall x(Hx \rightarrow \neg Gx)$



A forma argumentativa é inválida, pois alguns ramos da árvore semântica não fecham.

## Páginas 163–165

1 -

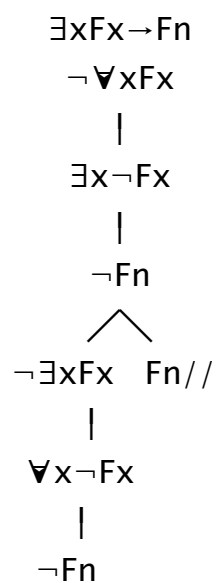
a) Interpretação:

Domínio: conjunto das pessoas

Fx: x é feliz

N: Reagan

Formalização:  $\exists xFx \rightarrow Fn \vdash \forall xFx$



A forma argumentativa é inválida, pois alguns ramos da árvore semântica não fecham.

b) Interpretação:

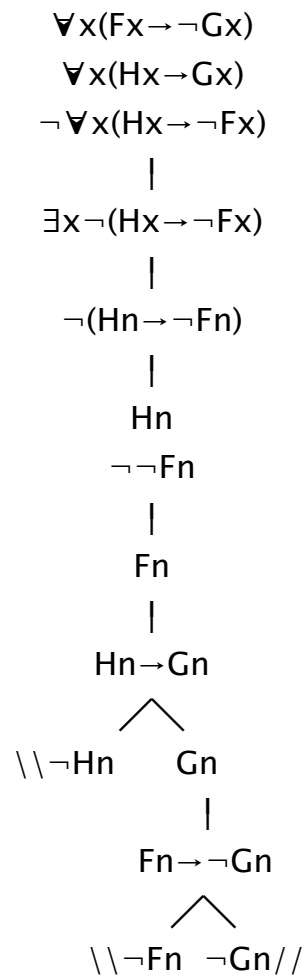
Domínio: conjunto das coisas

Fx: x é um fóssil

Gx: x pode ter relações sexuais

Hx: x é uma ostra

Formalização:  $\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx), \forall x(Hx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Hx \rightarrow \neg Fx)$



A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

c)

Interpretação:

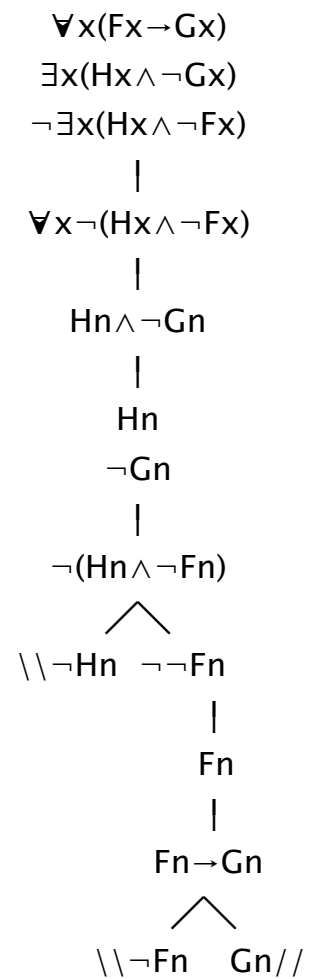
Domínio: conjunto seres vivos

Fx: x é uma águia

Gx: x pode voar

Hx: x é um porco

Formalização:  $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Hx \wedge \neg Gx) \vdash \exists x(Hx \wedge \neg Fx)$



A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

d)

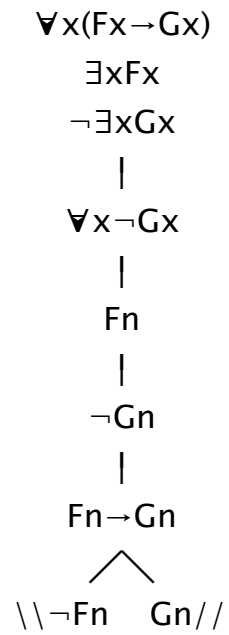
Interpretação:

Domínio: conjunto das pessoas vivas

Fx: x é político

Gx: x é charlatão

Formalização:  $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists xFx \vdash \exists xGx$



A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

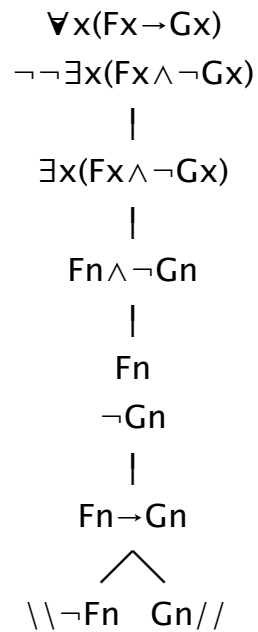
e)

Interpretação:

Domínio: conjunto das pessoas vivas

Fx: x é político

Gx: x é dispensável

Formalização:  $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \neg \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$ 

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

f)

Interpretação:

Domínio: conjunto das pessoas

Fx: x é um zemíndar

Gx: x é poderoso

Formalização:  $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$ 

$$\begin{array}{c}
 \forall x(Fx \rightarrow Gx) \\
 \neg \forall x(\neg Gx \rightarrow \neg Fx) \\
 | \\
 \exists x \neg(\neg Gx \rightarrow \neg Fx) \\
 | \\
 \neg(\neg Gn \rightarrow \neg Fn) \\
 | \\
 \neg Gn \\
 \neg \neg Fn \\
 | \\
 Fn \\
 | \\
 Fn \rightarrow Gn \\
 \wedge \\
 \backslash \neg Fn \quad Gn //
 \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

g)

Interpretação:

Domínio: conjunto de todas as coisas

Fx: x é uma maçã

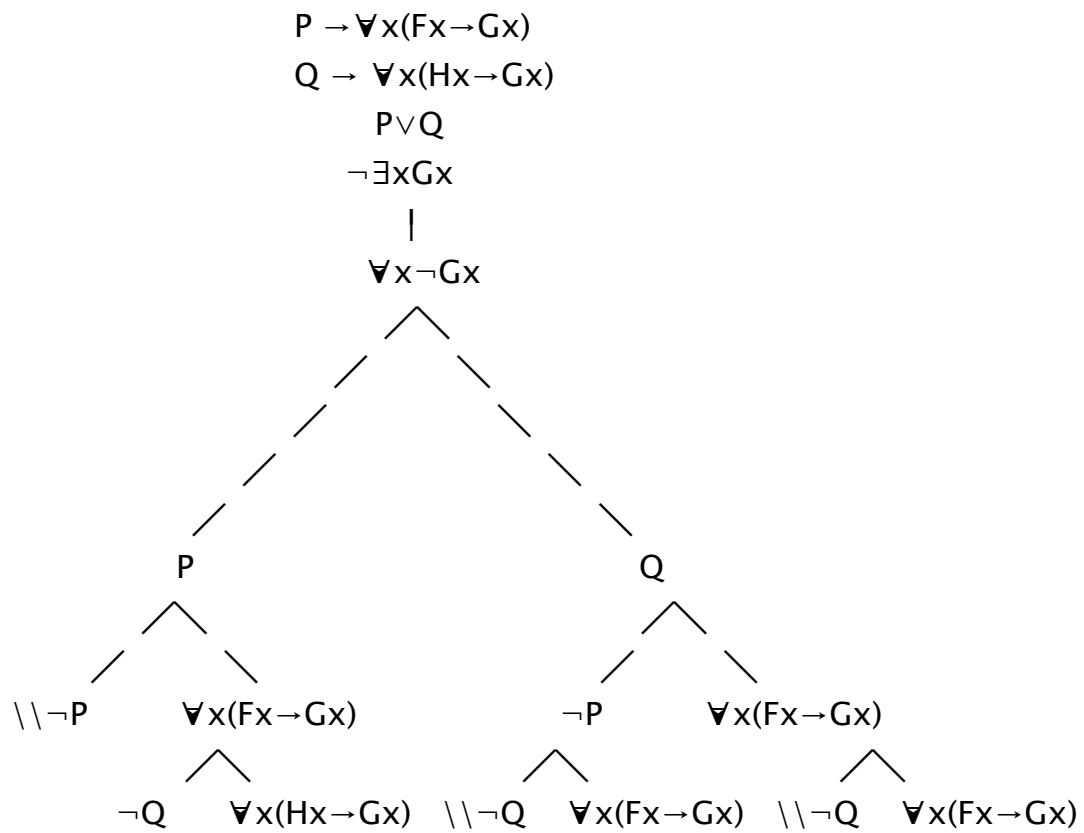
Gx: x fica feliz

Hx: x é uma criança

Q: neva

P: chove

Formalização:  $P \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow Gx)$ ,  $Q \rightarrow \forall x(Hx \rightarrow Gx)$ ,  $P \vee Q \vdash \exists xGx$



A forma argumentativa é inválida, pois alguns ramos da árvore semântica não fecham.

h) Interpretação:

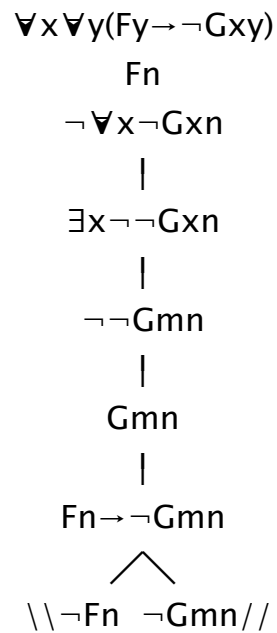
Domínio: conjunto das pessoas

Fx: x é tolo

Gxy: x gosta de y

N: Icabod

Formalização:  $\forall x \forall y (Fy \rightarrow \neg Gxy), Fn \vdash \forall x \neg Gxn$



A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

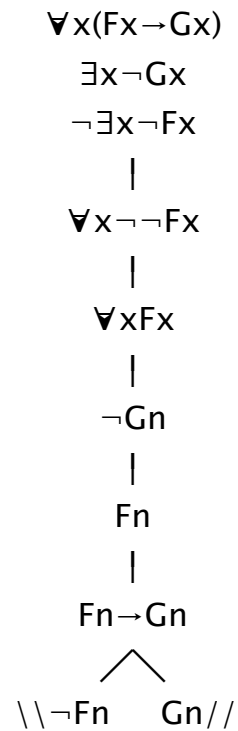
i) Interpretação:

Domínio: conjunto das pessoas vivas

Fx: x é canadense

Gx: x é aborrecido

Formalização:  $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x \neg Gx \vdash \exists x \neg Fx$



A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

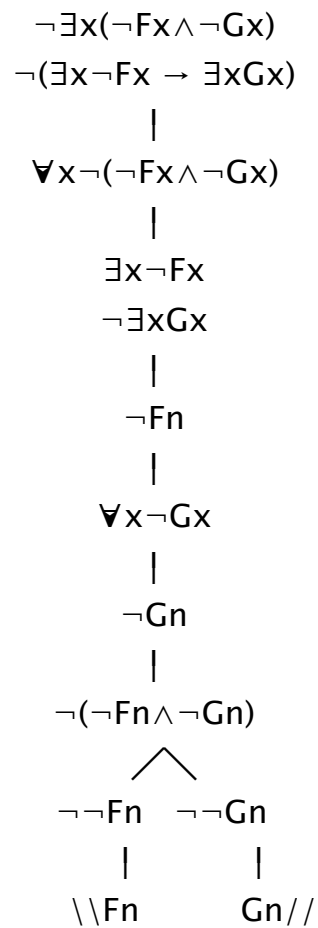
j) Interpretação:

Domínio: conjunto das pessoas

Fx: x é aborrecido

Gx: x é rico

Formalização:  $\neg \exists x(\neg Fx \wedge \neg Gx) \vdash \exists x \neg Fx \rightarrow \exists x Gx$



A forma argumentativa é inválida, pois alguns ramos da árvore semântica não fecham.

k) Interpretação:

Domínio: conjunto das pessoas

$Fxy$ : x ama y

$N$ : Icabod

Formalização:  $\exists x \forall y Fxy \vdash \exists x Fxn$

$$\exists x \forall y Fxy$$

$$\neg \exists x Fxn$$

$$|$$

$$\forall x \neg Fxn$$

$$|$$

$$\forall y Fmy$$

$$|$$

$$\neg Fmn$$

$$|$$

$$Fmn //$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

l) Interpretação:

Domínio: conjunto das pessoas

Fx: x é desprezível

Gx: x é falsamente difamado

Formalização:  $\exists x(Fx \vee Gx), \neg \exists x Fx \vdash \exists x Gx$

$$\begin{array}{c}
 \exists x(Fx \vee Gx) \\
 \neg \exists x Fx \\
 \neg \exists x Gx \\
 | \\
 \forall x \neg Gx \\
 | \\
 \forall x \neg Fx \\
 | \\
 Fx \vee Gx \\
 | \\
 \neg Gx \\
 | \\
 \neg Fx \\
 \wedge \\
 \\\! \! Fx \quad Gx \! \! //
 \end{array}$$

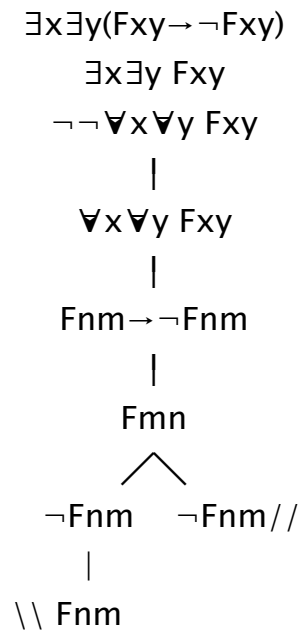
A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

m) Interpretação:

Domínio: conjunto das pessoas

$Fxy$ :  $x$  é mais alto que  $y$

Formalização:  $\exists x \exists y (Fxy \rightarrow \neg Fxy)$ ,  $\exists x \exists y Fxy \vdash \neg \forall x \forall y Fxy$



A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham. (Note-se que não é necessário usar a premissa  $\exists x \exists y Fxy$ )

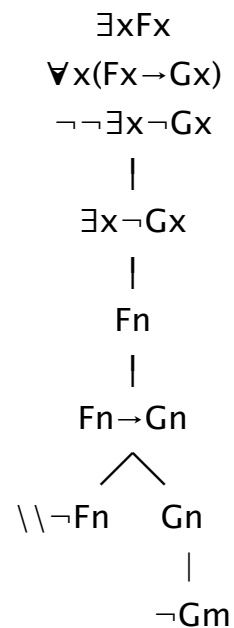
n) Interpretação:

Domínio: conjunto das pessoas

Fx: x é uma criança

Gx: x tem pai

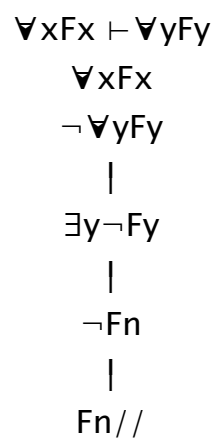
Formalização:  $\exists xFx, \forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \neg \exists x \neg Gx$



A forma argumentativa é inválida, pois alguns ramos da árvore semântica não fecham.

2 -

a)  $\forall xFx \vdash \forall yFy$



A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

$$\begin{array}{c}
 \forall yFy \vdash \forall xFx \\
 \forall yFy \\
 \neg \forall xFx \\
 | \\
 \exists x \neg Fx \\
 | \\
 \neg Fn \\
 | \\
 Fn //
 \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

b)  $\exists xFx \vdash \exists yFy$

$$\begin{array}{c}
 \exists xFx \vdash \exists yFy \\
 \exists xFx \\
 \neg \exists yFy \\
 | \\
 \forall y \neg Fy \\
 | \\
 Fn \\
 | \\
 \neg Fn //
 \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

$$\begin{array}{c}
 \exists y Fy \vdash \exists x Fx \\
 \exists y Fy \\
 \neg \exists x Fx \\
 | \\
 \forall x \neg Fx \\
 | \\
 Fn \\
 | \\
 \neg Fn //
 \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

c)  $\forall x \forall y Fxy \vdash \forall y \forall x Fxy$

$$\begin{array}{c}
 \forall x \forall y Fxy \vdash \forall y \forall x Fxy \\
 \forall x \forall y Fxy \\
 \neg \forall y \forall x Fxy \\
 | \\
 \exists y \neg \forall x Fxy \\
 | \\
 \neg \forall x Fxn \\
 | \\
 \exists x \neg Fxn \\
 | \\
 \neg Fmn \\
 | \\
 Fmn //
 \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

$$\begin{array}{c}
 \forall y \forall x Fxy \vdash \forall x \forall y Fxy \\
 \forall y \forall x Fxy \\
 \neg \forall x \forall y Fxy \\
 | \\
 \exists x \neg \forall y Fxy \\
 | \\
 \neg \forall y Fny \\
 | \\
 \exists y \neg Fny \\
 | \\
 \neg Fnm \\
 | \\
 \forall x Fxm \\
 | \\
 Fnm //
 \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

$$d) \exists x \exists y Fxy \vdash \exists y \exists x Fxy$$

$$\begin{array}{c}
 \exists x \exists y Fxy \vdash \exists y \exists x Fxy \\
 \exists x \exists y Fxy \\
 \neg \exists y \exists x Fxy \\
 | \\
 \forall y \neg \exists x Fxy \\
 | \\
 \exists y Fny \\
 | \\
 Fnm \\
 | \\
 \neg \exists x Fxm \\
 | \\
 \forall x \neg Fxm
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ \neg Fnm // \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

$$\begin{array}{c} \exists y \exists x Fxy \vdash \neg \exists x \exists y Fxy \\ \exists y \exists x Fxy \\ \neg \exists x \exists y Fxy \\ | \\ \forall x \neg \exists y Fxy \\ | \\ \exists x Fxm \\ | \\ Fnm \\ | \\ \neg \exists y Fny \\ | \\ \forall y \neg Fny \\ | \\ \neg Fnm // \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

e)  $\exists x \forall y Fxy \vdash \forall y \exists x Fxy$

$$\begin{array}{l}
 \exists x \forall y Fxy \vdash \forall y \exists x Fxy \\
 \exists x \forall y Fxy \\
 \neg \forall y \exists x Fxy \\
 | \\
 \exists y \neg \exists x Fxy \\
 | \\
 \forall y Fny \\
 | \\
 Fnm \\
 | \\
 \neg \exists x Fxm \\
 | \\
 \forall x \neg Fxm \\
 | \\
 \neg Fnm //
 \end{array}$$

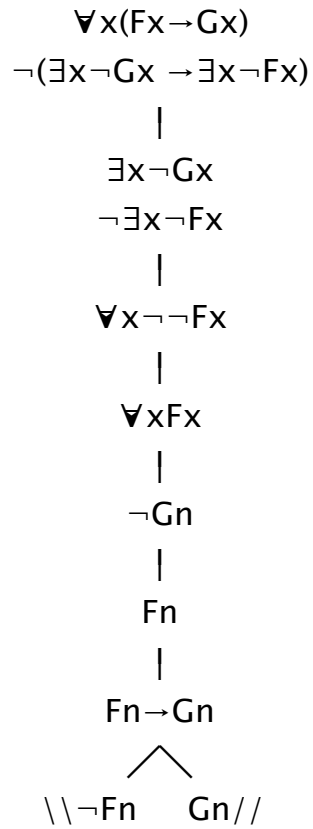
A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

f)  $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x \neg Gx \rightarrow \forall x \neg Fx$

$$\begin{array}{c}
 \forall x(Fx \rightarrow Gx) \\
 \neg(\forall x \neg Gx \rightarrow \forall x \neg Fx) \\
 | \\
 \forall x \neg Gx \\
 \neg \forall x \neg Fx \\
 | \\
 \exists x \neg \neg Fx \\
 | \\
 \exists x Fx \\
 | \\
 Fn \\
 | \\
 \neg Gn \\
 | \\
 Fn \rightarrow Gn \\
 \wedge \\
 \\\neg Fn \quad Gn//
 \end{array}$$

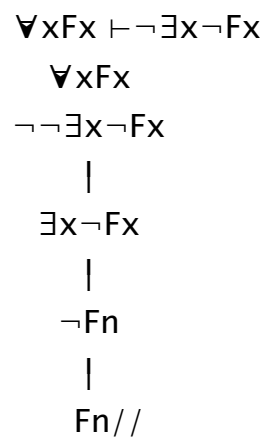
A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

g)  $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists x \neg Gx \rightarrow \exists x \neg Fx$



A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

3 - a)  $\forall x Fx \vdash \neg \exists x \neg Fx$



A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

$$\begin{array}{c}
 \neg \exists x \neg Fx \vdash \forall x Fx \\
 \neg \exists x \neg Fx \\
 \neg \forall x Fx \\
 | \\
 \exists x \neg Fx \\
 | \\
 \neg Fx \\
 | \\
 \forall x \neg \neg Fx \\
 | \\
 \forall x Fx \\
 | \\
 Fx //
 \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

b)  $\exists x Fx \vdash \neg \forall x \neg Fx$

$$\begin{array}{c}
 \exists x Fx \vdash \neg \forall x \neg Fx \\
 \exists x Fx \\
 \neg \forall x \neg Fx \\
 | \\
 \forall x \neg Fx \\
 | \\
 Fx \\
 | \\
 \neg Fx //
 \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

$$\begin{array}{c}
\neg \forall x \neg Fx \vdash \exists x Fx \\
\neg \forall x \neg Fx \\
\neg \exists x Fx \\
| \\
\forall x \neg Fx \\
| \\
\exists x \neg \neg Fx \\
| \\
\exists x Fx \\
| \\
Fn \\
| \\
\neg Fn //
\end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

c)  $\forall x(P \rightarrow Fx) \dashv\vdash P \rightarrow \forall x Fx$

$$\begin{array}{c}
\forall x(P \rightarrow Fx) \vdash P \rightarrow \forall x Fx \\
\forall x(P \rightarrow Fx) \\
\neg(P \rightarrow \forall x Fx) \\
| \\
P \\
\neg \forall x Fx \\
| \\
\exists x \neg Fx \\
| \\
\neg Fn \\
| \\
P \rightarrow Fn \\
\wedge \\
\\ \neg P \quad Fn //
\end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

d)  $\forall x(P \wedge Fx) \vdash P \wedge \forall xFx$

$\forall x(P \wedge Fx) \vdash P \wedge \forall xFx$

Não é demonstrável pelo método das árvores semânticas. Isto significa que, para este método não ser incompleto, é necessário introduzir regras sintáticas que determinem como fórmula mal formada a premissa deste seqüente, com base no fato de ser vácuo colocar o quantificador antes do P.

$$\begin{array}{c}
 P \wedge \forall xFx \vdash \forall x(P \wedge Fx) \\
 P \wedge \forall xFx \\
 \neg \forall x(P \wedge Fx) \\
 | \\
 \exists x \neg (P \wedge Fx) \\
 | \\
 \neg (P \wedge Fx) \\
 | \\
 P \\
 \forall xFx \\
 | \\
 Fx \\
 \wedge \\
 \neg P \quad \neg Fx
 \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

e)  $\forall x(P \vee Fx) \vdash P \vee \forall xFx$

$$\begin{array}{c}
 \forall x(P \vee Fx) \vdash P \vee \forall xFx \\
 \forall x(P \vee Fx) \\
 \neg(P \vee \forall xFx) \\
 | \\
 \neg P \\
 \neg \forall xFx \\
 | \\
 \exists x \neg Fx \\
 | \\
 \neg Fx \\
 | \\
 P \vee Fx \\
 \wedge \\
 \backslash \backslash P \quad Fx //
 \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

$$\begin{array}{c}
 P \vee \forall xFx \vdash \forall x(P \vee Fx) \\
 P \vee \forall xFx \\
 \neg \forall x(P \vee Fx) \\
 | \\
 \exists x \neg (P \vee Fx) \\
 | \\
 \neg (P \vee Fx) \\
 | \\
 \neg P \\
 \neg Fx \\
 | \\
 \wedge \\
 \backslash \backslash P \quad \forall xFx
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ \text{Fn} // \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

f)  $\exists x(P \vee Fx) \dashv\vdash P \vee \exists xFx$

$$\begin{array}{c} \exists x(P \vee Fx) \vdash P \vee \exists xFx \\ \exists x(P \vee Fx) \\ \neg (P \vee \exists xFx) \\ | \\ \neg P \\ \neg \exists xFx \\ | \\ \forall x \neg Fx \\ | \\ P \vee Fx \\ | \\ \neg Fx \\ \wedge \\ \backslash \backslash P \quad \text{Fn} // \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

$$P \vee \exists xFx \vdash \exists x(P \vee Fx)$$

Não é demonstrável pelo método das árvores semânticas. Isto significa que, para este método não ser incompleto, é necessário introduzir regras sintáticas que determinem como fórmula mal formada a conclusão deste seqüente, com base no fato de ser vácuo colocar o quantificador antes do P.

g)  $\exists x(P \wedge Fx) \dashv\vdash P \wedge \exists xFx$

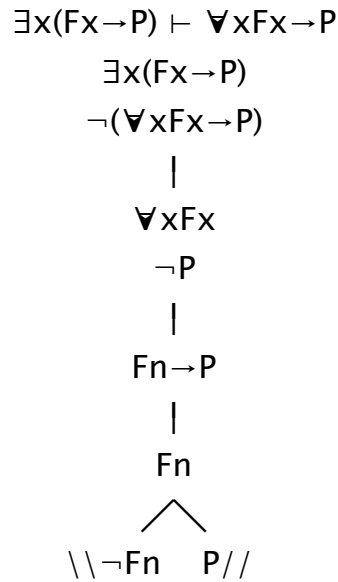
$$\begin{array}{c}
 \exists x(P \wedge Fx) \vdash P \wedge \exists xFx \\
 \exists x(P \wedge Fx) \\
 \neg (P \wedge \exists xFx) \\
 | \\
 \neg P \\
 \neg \exists xFx \\
 | \\
 P \wedge Fx \\
 | \\
 P //
 \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

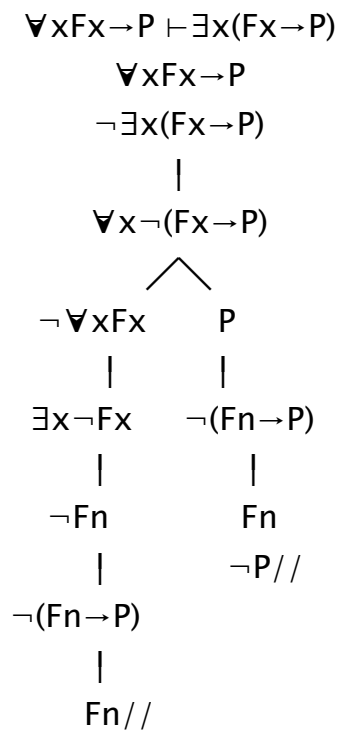
$$\begin{array}{c}
 P \wedge \exists xFx \vdash \exists x(P \wedge Fx) \\
 P \wedge \exists xFx \\
 \neg \exists x(P \wedge Fx) \\
 | \\
 \forall x \neg (P \wedge Fx) \\
 | \\
 P \\
 \exists xFx \\
 | \\
 Fx \\
 | \\
 \neg (P \wedge Fx) \\
 \wedge \\
 \neg P \quad \neg Fx //
 \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

h)  $\exists x(Fx \rightarrow P) \dashv\vdash \forall xFx \rightarrow P$



A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.



A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

$$\begin{array}{l}
 \text{i) } \quad \forall x(Fx \rightarrow P) \dashv\vdash \exists xFx \rightarrow P \\
 \quad \quad \forall x(Fx \rightarrow P) \vdash \exists xFx \rightarrow P \\
 \quad \quad \quad \forall x(Fx \rightarrow P) \\
 \quad \quad \quad \neg(\exists xFx \rightarrow P) \\
 \quad \quad \quad | \\
 \quad \quad \quad \exists xFx \\
 \quad \quad \quad \neg P \\
 \quad \quad \quad | \\
 \quad \quad \quad Fn \\
 \quad \quad \quad | \\
 \quad \quad \quad Fn \rightarrow P \\
 \quad \quad \quad \wedge \\
 \quad \quad \quad \backslash \neg Fn \quad P //
 \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.

$$\begin{array}{l}
 \exists xFx \rightarrow P \vdash \forall x(Fx \rightarrow P) \\
 \quad \quad \exists xFx \rightarrow P \\
 \quad \quad \neg \forall x(Fx \rightarrow P) \\
 \quad \quad | \\
 \quad \quad \exists x \neg(Fx \rightarrow P) \\
 \quad \quad | \\
 \quad \quad \neg(Fn \rightarrow P) \\
 \quad \quad | \\
 \quad \quad Fn \\
 \quad \quad \neg P \\
 \quad \quad \wedge \\
 \quad \quad \neg \exists xFx \quad P // \\
 \quad \quad | \\
 \quad \quad \backslash \neg Fn
 \end{array}$$

A forma argumentativa é válida, pois todos os ramos da árvore semântica fecham.