

LÓGICA I

Desidério Murcho

Universidade Federal de Ouro Preto

Revisão

Demonstre a validade dos sequentes seguintes usando o método da dedução natural:

1. $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \wedge Q) \rightarrow R$
2. $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash Q \rightarrow (P \rightarrow R)$
3. $P \wedge Q, P \rightarrow R \vdash R \wedge Q$

Dez regras primitivas

| Operador | Regra de Introdução | Regra de Eliminação |
|---------------|-----------------------|-----------------------|
| Conjunção | I_{\wedge} | E_{\wedge} |
| Condicional | I_{\rightarrow} | E_{\rightarrow} |
| Disjunção | I_{\vee} | E_{\vee} |
| Negação | I_{\neg} | E_{\neg} |
| Bicondicional | I_{\leftrightarrow} | E_{\leftrightarrow} |

Introdução da disjunção

Prem 1. A
 1 2. $A \vee B$ 1 $I \vee$

- O passo 2 depende de todas as premissas de que depender o passo 1

$$\frac{A}{A \vee B}$$

Eliminação **errada** da disjunção

Prem 1. $A \vee B$
1 2. A 1 E_{\vee}

O João está em Ouro Preto ou Belo Horizonte.
Logo, está em Ouro Preto.

Dilema construtivo simples

A Joana está na praia ou no cinema.

Se está na praia, está com o namorado.

Se está no cinema, está com o namorado.

Logo, em qualquer caso, está com o namorado.

$$A \vee B$$

$$A \rightarrow C$$

$$B \rightarrow C$$

$$C$$

Eliminação da disjunção

| | | | |
|------|----|------------|------------------------|
| Prem | 1. | $A \vee B$ | |
| Sup | 2. | A | |
| | | \vdots | |
| 2 | 4. | C | |
| Sup | 5. | B | |
| | | \vdots | |
| 5 | 7. | C | |
| 1 | 8. | C | $1, 2-4, 5-7 E_{\vee}$ |

- O passo 8 depende de todas as premissas de que dependerem os passos 1, 4 e 7, exceto das suposições 2 e 5

Um exemplo

$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \vdash R \vee S$

Prem 1. $P \vee Q$

Prem 2. $P \rightarrow R$

Prem 3. $Q \rightarrow S$

Um exemplo

$$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \vdash R \vee S$$

Prem 1. $P \vee Q$

Prem 2. $P \rightarrow R$

Prem 3. $Q \rightarrow S$

Sup $\left| \begin{array}{l} \hline 4. P \end{array} \right.$

Um exemplo

$$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \vdash R \vee S$$

Prem 1. $P \vee Q$

Prem 2. $P \rightarrow R$

Prem 3. $Q \rightarrow S$

| | | |
|-----|--------|--|
| Sup | 4. P | |
|-----|--------|--|

| | | |
|-----|--------|---------------------|
| 2,4 | 5. R | $2,4 E \rightarrow$ |
|-----|--------|---------------------|

Um exemplo

$$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \vdash R \vee S$$

Prem 1. $P \vee Q$

Prem 2. $P \rightarrow R$

Prem 3. $Q \rightarrow S$

| | | |
|-----|---------------|---------------------|
| Sup | 4. P | |
| 2,4 | 5. R | 2,4 $E \rightarrow$ |
| 2,4 | 6. $R \vee S$ | 5 $I \vee$ |

Um exemplo

$$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \vdash R \vee S$$

Prem 1. $P \vee Q$

Prem 2. $P \rightarrow R$

Prem 3. $Q \rightarrow S$

Sup

4. P

2,4

5. R

2,4 $E \rightarrow$

2,4

6. $R \vee S$

5 $I \vee$

Sup

7. Q

Um exemplo

$$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \vdash R \vee S$$

Prem 1. $P \vee Q$

Prem 2. $P \rightarrow R$

Prem 3. $Q \rightarrow S$

Sup

4. P

2,4

5. R

2,4 $E \rightarrow$

2,4

6. $R \vee S$

5 $I \vee$

Sup

7. Q

3,7

8. S

3,7 $E \rightarrow$

Um exemplo

$$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \vdash R \vee S$$

Prem 1. $P \vee Q$

Prem 2. $P \rightarrow R$

Prem 3. $Q \rightarrow S$

Sup 4. P

2,4 5. R 2,4 $E \rightarrow$

2,4 6. $R \vee S$ 5 $I \vee$

Sup 7. Q

3,7 8. S 3,7 $E \rightarrow$

3,7 9. $R \vee S$ 8 $I \vee$

Um exemplo

$$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \vdash R \vee S$$

Prem 1. $P \vee Q$

Prem 2. $P \rightarrow R$

Prem 3. $Q \rightarrow S$

Sup

4. P

2,4

5. R

2,4 $E \rightarrow$

2,4

6. $R \vee S$

5 $I \vee$

Sup

7. Q

3,7

8. S

3,7 $E \rightarrow$

3,7

9. $R \vee S$

8 $I \vee$

1,2,3

10. $R \vee S$

1, 4-6, 7-9 $E \vee$

Eliminação da disjunção

Prem 1. $A \vee B$

Sup 2. A

⋮

2 4. C

Sup 5. B

⋮

5 7. C

1 8. C

1, 2-4, 5-7 E_{\vee}

- O passo 8 depende de todas as premissas de que dependerem os passos 1, 4 e 7, exceto das suposições 2 e 5

Dez regras primitivas

| Operador | Regra de Introdução | Regra de Eliminação |
|---------------|-----------------------|-----------------------|
| Conjunção | I_{\wedge} | E_{\wedge} |
| Condicional | I_{\rightarrow} | E_{\rightarrow} |
| Disjunção | I_{\vee} | E_{\vee} |
| Negação | I_{\neg} | E_{\neg} |
| Bicondicional | I_{\leftrightarrow} | E_{\leftrightarrow} |

Eliminação da negação

| | | | |
|------|----|--------------|--------------|
| Prem | 1. | $\neg\neg A$ | |
| | 1 | 2. A | 1 E_{\neg} |

- O passo 2 depende de todas as premissas de que depender o passo 1

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Introdução da negação

$$\begin{array}{l}
 \text{Sup} \quad 1. \quad A \\
 \quad \quad \quad \vdots \\
 \quad \quad 1 \quad 3. \quad B \wedge \neg B \\
 \quad \quad \quad 4. \quad \neg A \qquad \quad 1-3 \text{ I}\neg
 \end{array}$$

- O passo 4 depende de todas as premissas de que depender o passo 3, exceto da suposição 1

$$\frac{A \vdash B \wedge \neg B}{\neg A}$$

Reductio ad absurdum

- Às demonstrações com a regra \vdash chama-se tradicionalmente demonstração por redução ao absurdo
- Todas as demonstrações que podemos fazer sem a \vdash podemos fazer com a \vdash

Rejeição da *reductio*

- Algumas lógicas não clássicas (lógicas intuicionistas) não aceitam este método de demonstração
- A ideia da rejeição é que uma demonstração de que é falso que $\neg A$ é diferente de demonstrar que é verdade que A

Um exemplo

$P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$
[*modus tollens*]

Prem 1. $P \rightarrow Q$

Prem 2. $\neg Q$

Um exemplo

$P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$
[*modus tollens*]

Prem 1. $P \rightarrow Q$

Prem 2. $\neg Q$

| | |
|-----|--------|
| Sup | 3. P |
|-----|--------|

Um exemplo

$P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$
[*modus tollens*]

Prem 1. $P \rightarrow Q$

Prem 2. $\neg Q$

Sup 3. P

1,3 4. Q

1,3 $E \rightarrow$

Um exemplo

$P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$
 [*modus tollens*]

Prem 1. $P \rightarrow Q$

Prem 2. $\neg Q$

Sup 3. P

1,3 4. Q 1,3 $E \rightarrow$

1,2,3 5. $Q \wedge \neg Q$ 2,4 $I \wedge$

Um exemplo

$P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$
 [*modus tollens*]

| | | | |
|-------|----|-------------------|---------------------|
| Prem | 1. | $P \rightarrow Q$ | |
| Prem | 2. | $\neg Q$ | |
| Sup | 3. | P | |
| 1,3 | 4. | Q | 1,3 $E \rightarrow$ |
| 1,2,3 | 5. | $Q \wedge \neg Q$ | 2,4 $I \wedge$ |
| 1,2 | 6. | $\neg P$ | 3-5 $I \neg$ |

Outro exemplo

$$P \wedge \neg Q \vdash \neg(P \rightarrow Q)$$

Prem 1. $P \wedge \neg Q$

Sup 2. $P \rightarrow Q$

Outro exemplo

$$P \wedge \neg Q \vdash \neg(P \rightarrow Q)$$

| | | | |
|------|----|-------------------|---------------------|
| Prem | 1. | $P \wedge \neg Q$ | |
| Sup | 2. | $P \rightarrow Q$ | |
| 1 | 3. | P | $1 \text{ E}\wedge$ |

Outro exemplo

$$P \wedge \neg Q \vdash \neg(P \rightarrow Q)$$

| | | | |
|------|----|-------------------|--------------------|
| Prem | 1. | $P \wedge \neg Q$ | |
| Sup | 2. | $P \rightarrow Q$ | |
| 1 | 3. | P | 1 $E\wedge$ |
| 1,2 | 4. | Q | 2,3 $E\rightarrow$ |

Outro exemplo

$$P \wedge \neg Q \vdash \neg(P \rightarrow Q)$$

| | | | |
|------|----|-------------------|-----------------------|
| Prem | 1. | $P \wedge \neg Q$ | |
| Sup | 2. | $P \rightarrow Q$ | |
| 1 | 3. | P | 1 E_{\wedge} |
| 1,2 | 4. | Q | 2,3 E_{\rightarrow} |
| 1 | 5. | $\neg Q$ | 1 E_{\wedge} |

Outro exemplo

$$P \wedge \neg Q \vdash \neg(P \rightarrow Q)$$

| | | | |
|------|----|-------------------|-----------------------|
| Prem | 1. | $P \wedge \neg Q$ | |
| Sup | 2. | $P \rightarrow Q$ | |
| 1 | 3. | P | 1 E_{\wedge} |
| 1,2 | 4. | Q | 2,3 E_{\rightarrow} |
| 1 | 5. | $\neg Q$ | 1 E_{\wedge} |
| 1,2 | 6. | $Q \wedge \neg Q$ | 4,5 I_{\wedge} |

Outro exemplo

$$P \wedge \neg Q \vdash \neg(P \rightarrow Q)$$

| | | | |
|------|----|-------------------------|-----------------------|
| Prem | 1. | $P \wedge \neg Q$ | |
| Sup | 2. | $P \rightarrow Q$ | |
| 1 | 3. | P | 1 E_{\wedge} |
| 1,2 | 4. | Q | 2,3 E_{\rightarrow} |
| 1 | 5. | $\neg Q$ | 1 E_{\wedge} |
| 1,2 | 6. | $Q \wedge \neg Q$ | 4,5 I_{\wedge} |
| 1 | 7. | $\neg(P \rightarrow Q)$ | 2-6 I_{\neg} |

Introdução da negação

$$\begin{array}{l}
 \text{Sup} \quad 1. \quad A \\
 \quad \quad \quad \vdots \\
 1 \quad 3. \quad B \wedge \neg B \\
 \quad \quad 4. \quad \neg A \qquad \quad 1-3 \text{ I}\neg
 \end{array}$$

- O passo 4 depende de todas as premissas de que depender o passo 3, exceto da suposição 1

$$\frac{A \vdash B \wedge \neg B}{\neg A}$$

Eliminação da bicondicional

Prem 1. $A \Leftrightarrow B$

1 2. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 1 E_{\Leftrightarrow}

- O passo 2 depende de todas as premissas de que depender o passo 1

$$\frac{A \Leftrightarrow B}{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)}$$

Introdução da bicondicional

Prem 1. $A \rightarrow B$

Prem 2. $B \rightarrow A$

1,2 3. $A \Leftrightarrow B$ 1,2 $\text{I}\Leftrightarrow$

- O passo 3 depende de todas as premissas de que dependerem os passos 1 e 2

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow A \end{array}}{A \Leftrightarrow B}$$

Dez regras primitivas

| Operador | Regra de Introdução | Regra de Eliminação |
|---------------|-----------------------|-----------------------|
| Conjunção | I_{\wedge} | E_{\wedge} |
| Condicional | I_{\rightarrow} | E_{\rightarrow} |
| Disjunção | I_{\vee} | E_{\vee} |
| Negação | I_{\neg} | E_{\neg} |
| Bicondicional | I_{\leftrightarrow} | E_{\leftrightarrow} |

Exercícios

Formule informalmente as seguintes regras primitivas:

1. $I\vee$
2. $E\wedge$
3. $I\rightarrow$
4. $E\vee$
5. $E\rightarrow$
6. $I\neg$



RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS

Dedução natural

Exercícios (p. 77)

e) $P \wedge (Q \vee R) \dashv\vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

f) $P \dashv\vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

g) -

h) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \vdash P$

$$P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Prem 1. $P \wedge (Q \vee R)$

1 2. P 1 E_{\wedge}

1 3. $Q \vee R$ 1 E_{\wedge}

$$P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Prem 1. $P \wedge (Q \vee R)$

1 2. P 1 E_{\wedge}

1 3. $Q \vee R$ 1 E_{\wedge}

Sup 4. Q

$$P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

| | | | |
|------|-----|-----------------------|-----------------------------|
| Prem | 1. | $P \wedge (Q \vee R)$ | |
| | 1 | 2. | P 1 E \wedge |
| | 1 | 3. | $Q \vee R$ 1 E \wedge |
| Sup | | 4. | Q |
| | 1,4 | 5. | $P \wedge Q$ 2,4 I \wedge |

$$P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

| | | | |
|------|-----|-------------------------------------|------------------|
| Prem | 1. | $P \wedge (Q \vee R)$ | |
| | 1 | 2. P | 1 E_{\wedge} |
| | 1 | 3. $Q \vee R$ | 1 E_{\wedge} |
| Sup | | 4. Q | |
| | 1,4 | 5. $P \wedge Q$ | 2,4 I_{\wedge} |
| | 1,4 | 6. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | 5 I_{\vee} |

$$P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

| | | | |
|------|-----|-----------------------|---|
| Prem | 1. | $P \wedge (Q \vee R)$ | |
| | 1 | 2. | P 1 E \wedge |
| | 1 | 3. | $Q \vee R$ 1 E \wedge |
| Sup | | 4. | Q |
| | 1,4 | 5. | $P \wedge Q$ 2,4 I \wedge |
| | 1,4 | 6. | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ 5 I \vee |
| Sup | | 7. | R |

$$P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

| | | | |
|------|----|----------------------------------|------------------|
| Prem | 1. | $P \wedge (Q \vee R)$ | |
| 1 | 2. | P | 1 E_{\wedge} |
| 1 | 3. | $Q \vee R$ | 1 E_{\wedge} |
| Sup | 4. | Q | |
| 1,4 | 5. | $P \wedge Q$ | 2,4 I_{\wedge} |
| 1,4 | 6. | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | 5 I_{\vee} |
| Sup | 7. | R | |
| 1,7 | 8. | $P \wedge R$ | 2,7 I_{\wedge} |

$$P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

| | | | |
|------|----|----------------------------------|------------------|
| Prem | 1. | $P \wedge (Q \vee R)$ | |
| 1 | 2. | P | 1 E_{\wedge} |
| 1 | 3. | $Q \vee R$ | 1 E_{\wedge} |
| Sup | 4. | Q | |
| 1,4 | 5. | $P \wedge Q$ | 2,4 I_{\wedge} |
| 1,4 | 6. | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | 5 I_{\vee} |
| Sup | 7. | R | |
| 1,7 | 8. | $P \wedge R$ | 2,7 I_{\wedge} |
| 1,7 | 9. | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | 8 I_{\vee} |

$$P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

| | | | |
|------|-----|----------------------------------|------------------------|
| Prem | 1. | $P \wedge (Q \vee R)$ | |
| 1 | 2. | P | 1 E_{\wedge} |
| 1 | 3. | $Q \vee R$ | 1 E_{\wedge} |
| Sup | 4. | Q | |
| 1,4 | 5. | $P \wedge Q$ | 2,4 I_{\wedge} |
| 1,4 | 6. | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | 5 I_{\vee} |
| Sup | 7. | R | |
| 1,7 | 8. | $P \wedge R$ | 2,7 I_{\wedge} |
| 1,7 | 9. | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | 8 I_{\vee} |
| 1 | 10. | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | 3, 4-6, 7-9 E_{\vee} |

Exercícios (p. 77)

e) $P \wedge (Q \vee R) \dashv\vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

f) $P \dashv\vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

g) -

h) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \vdash P$

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$$

Prem 1. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Sup 2. $P \wedge Q$

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$$

| | | | |
|------|----|----------------------------------|--------------|
| Prem | 1. | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | |
| Sup | 2. | $P \wedge Q$ | |
| 2 | 3. | P | 2 E \wedge |
| 2 | 4. | Q | 2 E \wedge |

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$$

| | | | |
|------|----|----------------------------------|--------------|
| Prem | 1. | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | |
| Sup | 2. | $P \wedge Q$ | |
| 2 | 3. | P | 2 E \wedge |
| 2 | 4. | Q | 2 E \wedge |
| 2 | 5. | $Q \vee R$ | 4 I \vee |

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$$

| | | | |
|------|----|----------------------------------|----------------|
| Prem | 1. | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | |
| Sup | 2. | $P \wedge Q$ | |
| 2 | 3. | P | 2 E \wedge |
| 2 | 4. | Q | 2 E \wedge |
| 2 | 5. | $Q \vee R$ | 4 I \vee |
| 2 | 6. | $P \wedge (Q \vee R)$ | 3,5 I \wedge |

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$$

| | | | |
|------|----|----------------------------------|----------------|
| Prem | 1. | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | |
| Sup | 2. | $P \wedge Q$ | |
| 2 | 3. | P | 2 E \wedge |
| 2 | 4. | Q | 2 E \wedge |
| 2 | 5. | $Q \vee R$ | 4 I \vee |
| 2 | 6. | $P \wedge (Q \vee R)$ | 3,5 I \wedge |
| Sup | 7. | $P \wedge R$ | |

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$$

| | | | |
|------|----|----------------------------------|----------------|
| Prem | 1. | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | |
| Sup | 2. | $P \wedge Q$ | |
| 2 | 3. | P | 2 E \wedge |
| 2 | 4. | Q | 2 E \wedge |
| 2 | 5. | $Q \vee R$ | 4 I \vee |
| 2 | 6. | $P \wedge (Q \vee R)$ | 3,5 I \wedge |
| Sup | 7. | $P \wedge R$ | |
| 7 | 8. | P | 7 E \wedge |
| 7 | 9. | R | E \wedge |

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$$

| | | | |
|------|-----|----------------------------------|----------------|
| Prem | 1. | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | |
| Sup | 2. | $P \wedge Q$ | |
| 2 | 3. | P | 2 E \wedge |
| 2 | 4. | Q | 2 E \wedge |
| 2 | 5. | $Q \vee R$ | 4 I \vee |
| 2 | 6. | $P \wedge (Q \vee R)$ | 3,5 I \wedge |
| Sup | 7. | $P \wedge R$ | |
| 7 | 8. | P | 7 E \wedge |
| 7 | 9. | R | E \wedge |
| 7 | 10. | $Q \vee R$ | 9 I \vee |

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$$

| | | | |
|------|-----|----------------------------------|------------------|
| Prem | 1. | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | |
| Sup | 2. | $P \wedge Q$ | |
| 2 | 3. | P | 2 E \wedge |
| 2 | 4. | Q | 2 E \wedge |
| 2 | 5. | $Q \vee R$ | 4 I \vee |
| 2 | 6. | $P \wedge (Q \vee R)$ | 3,5 I \wedge |
| Sup | 7. | $P \wedge R$ | |
| 7 | 8. | P | 7 E \wedge |
| 7 | 9. | R | E \wedge |
| 7 | 10. | $Q \vee R$ | 9 I \vee |
| 7 | 11. | $P \wedge (Q \vee R)$ | 8, 10 I \wedge |

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$$

| | | | |
|------|-----|----------------------------------|-----------------------|
| Prem | 1. | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | |
| Sup | 2. | $P \wedge Q$ | |
| 2 | 3. | P | 2 E \wedge |
| 2 | 4. | Q | 2 E \wedge |
| 2 | 5. | $Q \vee R$ | 4 I \vee |
| 2 | 6. | $P \wedge (Q \vee R)$ | 3,5 I \wedge |
| Sup | 7. | $P \wedge R$ | |
| 7 | 8. | P | 7 E \wedge |
| 7 | 9. | R | E \wedge |
| 7 | 10. | $Q \vee R$ | 9 I \vee |
| 7 | 11. | $P \wedge (Q \vee R)$ | 8, 10 I \wedge |
| 1 | 12. | $P \wedge (Q \vee R)$ | 1, 2-6, 7-11 E \vee |

Exercícios (p. 77)

e) $P \wedge (Q \vee R) \dashv\vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

f) $P \dashv\vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

g) -

h) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \vdash P$

$$P \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

Prem

1. P

Sup

2. $\neg(Q \vee \neg Q)$

$$P \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

| | | | |
|------|----|-----------------------|------|
| Prem | 1. | P | |
| Sup | 2. | $\neg(Q \vee \neg Q)$ | |
| Sup | 3. | Q | |
| 3 | 4. | $Q \vee \neg Q$ | 3 Iv |

$$P \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

| | | | |
|------|----|--|----------------|
| Prem | 1. | P | |
| Sup | 2. | $\neg(Q \vee \neg Q)$ | |
| Sup | 3. | Q | |
| 3 | 4. | $Q \vee \neg Q$ | 3 I \vee |
| 2,3 | 5. | $(Q \vee \neg Q) \wedge \neg(Q \vee \neg Q)$ | 2,4 I \wedge |
| 2 | 6. | $\neg Q$ | 3-5 I \neg |

$$P \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

| | | | |
|------|----|--|----------------|
| Prem | 1. | P | |
| Sup | 2. | $\neg(Q \vee \neg Q)$ | |
| Sup | 3. | Q | |
| 3 | 4. | $Q \vee \neg Q$ | 3 I \vee |
| 2,3 | 5. | $(Q \vee \neg Q) \wedge \neg(Q \vee \neg Q)$ | 2,4 I \wedge |
| 2 | 6. | $\neg Q$ | 3-5 I \neg |
| 2 | 7. | $Q \vee \neg Q$ | 6 I \vee |

$$P \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

| | | | |
|------|----|--|----------------|
| Prem | 1. | P | |
| Sup | 2. | $\neg(Q \vee \neg Q)$ | |
| Sup | 3. | Q | |
| 3 | 4. | $Q \vee \neg Q$ | 3 I \vee |
| 2,3 | 5. | $(Q \vee \neg Q) \wedge \neg(Q \vee \neg Q)$ | 2,4 I \wedge |
| 2 | 6. | $\neg Q$ | 3-5 I \neg |
| 2 | 7. | $Q \vee \neg Q$ | 6 I \vee |
| 2 | 8. | $(Q \vee \neg Q) \wedge \neg(Q \vee \neg Q)$ | 2,7 I \wedge |

$$P \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

| | | | |
|------|-----|--|----------------|
| Prem | 1. | P | |
| Sup | 2. | $\neg(Q \vee \neg Q)$ | |
| Sup | 3. | Q | |
| 3 | 4. | $Q \vee \neg Q$ | 3 I \vee |
| 2,3 | 5. | $(Q \vee \neg Q) \wedge \neg(Q \vee \neg Q)$ | 2,4 I \wedge |
| 2 | 6. | $\neg Q$ | 3-5 I \neg |
| 2 | 7. | $Q \vee \neg Q$ | 6 I \vee |
| 2 | 8. | $(Q \vee \neg Q) \wedge \neg(Q \vee \neg Q)$ | 2,7 I \wedge |
| | 9. | $\neg\neg(Q \vee \neg Q)$ | 2-8 I \neg |
| | 10. | $Q \vee \neg Q$ | 9 E \neg |

$$P \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

| | | | |
|------|-----|--|----------------|
| Prem | 1. | P | |
| Sup | 2. | $\neg(Q \vee \neg Q)$ | |
| Sup | 3. | Q | |
| 3 | 4. | $Q \vee \neg Q$ | 3 I \vee |
| 2,3 | 5. | $(Q \vee \neg Q) \wedge \neg(Q \vee \neg Q)$ | 2,4 I \wedge |
| 2 | 6. | $\neg Q$ | 3-5 I \neg |
| 2 | 7. | $Q \vee \neg Q$ | 6 I \vee |
| 2 | 8. | $(Q \vee \neg Q) \wedge \neg(Q \vee \neg Q)$ | 2,7 I \wedge |
| | 9. | $\neg\neg(Q \vee \neg Q)$ | 2-8 I \neg |
| | 10. | $Q \vee \neg Q$ | 9 E \neg |
| Sup | 11. | Q | |

$$P \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

| | | | |
|------|-----|--|-----------------|
| Prem | 1. | P | |
| Sup | 2. | $\neg(Q \vee \neg Q)$ | |
| Sup | 3. | Q | |
| 3 | 4. | $Q \vee \neg Q$ | 3 I \vee |
| 2,3 | 5. | $(Q \vee \neg Q) \wedge \neg(Q \vee \neg Q)$ | 2,4 I \wedge |
| 2 | 6. | $\neg Q$ | 3-5 I \neg |
| 2 | 7. | $Q \vee \neg Q$ | 6 I \vee |
| 2 | 8. | $(Q \vee \neg Q) \wedge \neg(Q \vee \neg Q)$ | 2,7 I \wedge |
| | 9. | $\neg\neg(Q \vee \neg Q)$ | 2-8 I \neg |
| | 10. | $Q \vee \neg Q$ | 9 E \neg |
| Sup | 11. | Q | |
| 1,11 | 12. | $P \wedge Q$ | 1,11 I \wedge |

$$P \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

| | | |
|------|---|-------|
| 1,11 | 13. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ | 12 Iv |
|------|---|-------|

$$P \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

| | | | |
|------|--|---|-------|
| 1,11 | | 13. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ | 12 Iv |
| Sup | | 14. $\neg Q$ | |

$$P \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

| | | |
|------|---|-----------------|
| 1,11 | 13. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ | 12 I \vee |
| Sup | 14. $\neg Q$ | |
| 1,14 | 15. $P \wedge \neg Q$ | 1,14 I \wedge |

$$P \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

| | | |
|------|---|-----------------|
| 1,11 | 13. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ | 12 Iv |
| Sup | 14. $\neg Q$ | |
| 1,14 | 15. $P \wedge \neg Q$ | 1,14 I \wedge |
| 1,14 | 16. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ | 15 Iv |

$$P \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

| | | |
|------|---|--------------------------|
| 1,11 | 13. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ | 12 $I\vee$ |
| Sup | 14. $\neg Q$ | |
| 1,14 | 15. $P \wedge \neg Q$ | 1,14 $I\wedge$ |
| 1,14 | 16. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ | 15 $I\vee$ |
| 1 | 17. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ | 10, 11-13, 14-16 $E\vee$ |

REGRAS DERIVADAS

Dedução natural

Dois tipos de regras

Regras primitivas

- Não são demonstráveis com base noutras regras

Regras derivadas

- São demonstráveis com base noutras regras
- Facilitam as derivações
- São padrões inferenciais elementares

Algumas regras derivadas

- $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$ (*Modus tollens*)
- $\neg(A \rightarrow B) \dashv\vdash A \wedge \neg B$ (Negação da condicional)
- $\neg(A \wedge B) \dashv\vdash \neg A \vee \neg B$ (De Morgan)
- $\neg(A \vee B) \dashv\vdash \neg A \wedge \neg B$ (De Morgan)
- $A \rightarrow B \dashv\vdash \neg A \vee B$ (condicional)

Exercícios (p. 77)

e) $P \wedge (Q \vee R) \dashv\vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

f) $P \dashv\vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

g) -

h) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \vdash P$

$$((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \vdash P$$

Prem 1. $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$

Sup 2. $\neg P$

$$((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \vdash P$$

Prem 1. $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$

Sup 2. $\neg P$

1,2 3. $\neg(P \rightarrow Q)$

1,2 RD: MT

$$((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \vdash P$$

| | | | |
|------|----|-----------------------------------|--------------------------|
| Prem | 1. | $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$ | |
| Sup | 2. | $\neg P$ | |
| 1,2 | 3. | $\neg(P \rightarrow Q)$ | 1,2 RD: MT |
| 1,2 | 4. | $P \wedge \neg Q$ | 3 RD: $\neg \rightarrow$ |

$$((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \vdash P$$

| | | | |
|------|----|-----------------------------------|--------------------------|
| Prem | 1. | $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$ | |
| Sup | 2. | $\neg P$ | |
| 1,2 | 3. | $\neg(P \rightarrow Q)$ | 1,2 RD: MT |
| 1,2 | 4. | $P \wedge \neg Q$ | 3 RD: $\neg \rightarrow$ |
| 1,2 | 5. | P | 4 E \wedge |

$$((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \vdash P$$

| | | | |
|------|----|-----------------------------------|--------------------------|
| Prem | 1. | $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$ | |
| Sup | 2. | $\neg P$ | |
| 1,2 | 3. | $\neg(P \rightarrow Q)$ | 1,2 RD: MT |
| 1,2 | 4. | $P \wedge \neg Q$ | 3 RD: $\neg \rightarrow$ |
| 1,2 | 5. | P | 4 E \wedge |
| 1,2 | 6. | $P \wedge \neg P$ | 2,5 I \wedge |

$$((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \vdash P$$

| | | | |
|------|----|-----------------------------------|--------------------------|
| Prem | 1. | $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$ | |
| Sup | 2. | $\neg P$ | |
| 1,2 | 3. | $\neg(P \rightarrow Q)$ | 1,2 RD: MT |
| 1,2 | 4. | $P \wedge \neg Q$ | 3 RD: $\neg \rightarrow$ |
| 1,2 | 5. | P | 4 E \wedge |
| 1,2 | 6. | $P \wedge \neg P$ | 2,5 I \wedge |
| 1 | 7. | $\neg\neg P$ | 2-6 I \neg |
| 1 | 8. | P | 7 E \neg |

Modus tollens: $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$

Prem 1. $P \rightarrow Q$

Prem 2. $\neg Q$

Modus tollens: $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$

Prem 1. $P \rightarrow Q$

Prem 2. $\neg Q$

Sup 3. P

Modus tollens: $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$

Prem 1. $P \rightarrow Q$

Prem 2. $\neg Q$

Sup 3. P

1,3 4. Q

1,3 $E \rightarrow$

Modus tollens: $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$

Prem 1. $P \rightarrow Q$

Prem 2. $\neg Q$

Sup 3. P

1,3 4. Q 1,3 $E \rightarrow$

1,2,3 5. $Q \wedge \neg Q$ 2,4 $I \wedge$

Modus tollens: $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$

| | | | |
|-------|----|-------------------|---------------------|
| Prem | 1. | $P \rightarrow Q$ | |
| Prem | 2. | $\neg Q$ | |
| Sup | 3. | P | |
| 1,3 | 4. | Q | 1,3 $E \rightarrow$ |
| 1,2,3 | 5. | $Q \wedge \neg Q$ | 2,4 $I \wedge$ |
| 1,2 | 6. | $\neg P$ | 3-5 $I \neg$ |

Negação da condicional:

$$\neg(P \rightarrow Q) \dashv\vdash P \wedge \neg Q$$

Prem 1. $\neg(P \rightarrow Q)$

Sup | 2. $\neg(P \wedge \neg Q)$

Negação da condicional:

$$\neg(P \rightarrow Q) \dashv\vdash P \wedge \neg Q$$

| | | | |
|------|----|-------------------------|----------|
| Prem | 1. | $\neg(P \rightarrow Q)$ | |
| Sup | 2. | $\neg(P \wedge \neg Q)$ | |
| 2 | 3. | $\neg P \vee Q$ | 2 RD: DM |

Negação da condicional:

$$\neg(P \rightarrow Q) \dashv\vdash P \wedge \neg Q$$

| | | | |
|------|-----|-------------------------|---------------------------------------|
| Prem | 1. | $\neg(P \rightarrow Q)$ | |
| | Sup | 2. | $\neg(P \wedge \neg Q)$ |
| | 2 | 3. | $\neg P \vee Q$ 2 RD: DM |
| | 2 | 4. | $P \rightarrow Q$ 3 RD: \rightarrow |

Negação da condicional:

$$\neg(P \rightarrow Q) \dashv\vdash P \wedge \neg Q$$

| | | | |
|------|----|--|---------------------|
| Prem | 1. | $\neg(P \rightarrow Q)$ | |
| Sup | 2. | $\neg(P \wedge \neg Q)$ | |
| 2 | 3. | $\neg P \vee Q$ | 2 RD: DM |
| 2 | 4. | $P \rightarrow Q$ | 3 RD: \rightarrow |
| 1,2 | 5. | $(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q)$ | 1,4 I \wedge |

Negação da condicional:

$$\neg(P \rightarrow Q) \dashv\vdash P \wedge \neg Q$$

| | | | |
|------|----|--|---------------------|
| Prem | 1. | $\neg(P \rightarrow Q)$ | |
| Sup | 2. | $\neg(P \wedge \neg Q)$ | |
| 2 | 3. | $\neg P \vee Q$ | 2 RD: DM |
| 2 | 4. | $P \rightarrow Q$ | 3 RD: \rightarrow |
| 1,2 | 5. | $(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q)$ | 1,4 I \wedge |
| 1 | 6. | $P \wedge \neg Q$ | 2-5 I \neg |

ESTRATÉGIAS INFORMAIS

Dedução natural

Seis estratégias

1. As suposições só podem ser eliminadas com 3 regras: $E\vee$, $I\neg$ e $I\rightarrow$. Portanto, sempre que usamos uma suposição temos de ter em vista o uso posterior de uma destas regras, para podermos eliminar a suposição.

Seis estratégias

2. Quando a conclusão que se pretende demonstrar tem como principal operador a negação é avisado fazer uma suposição idêntica à conclusão, mas sem o operador, visando obter uma contradição, para então usar a \perp .

Seis estratégias

3. Quando a conclusão que se pretende demonstrar é uma condicional, é uma boa idéia introduzir a antecedente da condicional como uma suposição, com o objetivo de derivar a partir dela a conseqüente. Depois eliminamos a suposição utilizando a regra $I \rightarrow$ e obtemos a conclusão desejada.

Seis estratégias

4. Quando podemos usar regras derivadas para transformar numa condicional a conclusão que se pretende demonstrar, podemos fazer à mesma uma derivação condicional. Por exemplo, se a conclusão for $P \vee Q$, podemos supor $\neg P$ para derivar Q , e ao chegar a $\neg P \rightarrow Q$ usamos a regra derivada para transformar esta fórmula em $P \vee Q$.

Seis estratégias

5. Uma contradição só pode ser utilizada para negar uma suposição se depender da suposição que se pretende negar. Contudo, qualquer fórmula A pode depender de qualquer outra B , bastando para tal usar primeiro $I\wedge$ para juntar A e B , usando de seguida $E\wedge$ para voltar a separá-las. Informalmente, não precisamos sequer de usar primeiro $I\wedge$ e depois $E\wedge$: podemos negar A diretamente.

Seis estratégias

6. Quando a conclusão que se pretende demonstrar é uma bicondicional, por exemplo, $P \Leftrightarrow Q$, podemos apresentar como suposição primeiro P , e derivar Q , e depois supor Q para derivar P ; finalmente, juntamos as duas condicionais com $I\wedge$.