

Desidério Murcho  
Universidade Federal de Ouro Preto

# LÓGICA I

# Immanuel Kant



“Há letrados para quem a história da filosofia (tanto antiga como moderna) é a sua própria filosofia; os presentes prolegómenos não são escritos para eles. Deverão aguardar que os que se esforçam por beber nas fontes da própria razão tenham terminado a sua tarefa, e será então a sua vez de informar o mundo do que se fez.”

O argumento moral de Kant

# O papel da lógica na filosofia

# Um argumento a favor de Deus

- ◉ Kant considerava que os argumentos tradicionais a favor da existência de Deus não eram bons
  - Argumento cosmológico
  - Argumento do desígnio
  - Argumento ontológico
- ◉ Formulou então um argumento diferente a favor da existência de Deus

# A ideia central

- ◉ Kant defende que Deus é um postulado da razão prática
- ◉ Pensava que agir moralmente é pressupor a existência de Deus
- ◉ Vejamos o argumento

# Interpretação e reconstrução

- Um texto filosófico é geralmente muito complexo
- Além disso, os argumentos presentes nos textos podem não estar **explicitamente** apresentados
- Uma parte importante do trabalho filosófico é a **interpretação** e **reconstrução** de argumentos

# Uma interpretação

Temos o dever de promover o bem supremo.

Se o bem supremo não fosse possível, não teríamos o dever de o promover.

Se Deus não existisse, o bem supremo não seria possível.

Logo, Deus existe.

# Formalização

- Há várias formalizações correctas possíveis de um argumento
- Uma formalização é tanto melhor quanto mais plausível torna o argumento

# Uma formalização

P: Temos o dever de promover o bem supremo.

Q: O bem supremo é possível.

R: Deus existe.

P

$\neg Q \rightarrow \neg P$

$\neg R \rightarrow \neg Q$

Logo, R

# Inspetor de circunstâncias

PQR	P,	$\neg Q \rightarrow \neg P,$	$\neg R \rightarrow \neg Q$	$\models$	R
VVV	V	F V F	F V F		V
VVF	V	F V F	V F F		F
VFV	V	V F F	F V V		V
VFF	V	V F F	V V V		F
FVV	F	F V V	F V F		V
FVF	F	F V V	V F F		F
FFV	F	V V V	F V V		V
FFF	F	V V V	V V V		F

# Discussão do argumento

- O argumento é válido
- Se todas as suas premissas forem verdadeiras, a conclusão também é verdadeira
- Todas as premissas parecem plausíveis, tomadas em si mesmas
- Mas quando as temos em mente conjuntamente, vemos que interpretamos o conceito de bem supremo de modo ligeiramente diferente na premissa 1 e 2 na premissa 3

# Recordando o argumento

1. Temos o dever de promover o bem supremo.
  2. Se o bem supremo não fosse possível, não teríamos o dever de o promover.
  3. Se Deus não existisse, o bem supremo não seria possível.
- ◉ Logo, Deus existe.
  - ◉ Só temos o dever de fazer algo, se for possível fazê-lo
  - ◉ É isso que dá plausibilidade à premissa 2
  - ◉ Não temos o dever de tentar arrefecer o Sol porque não é possível arrefecer o Sol

# Discussão do argumento

- O conceito de **bem supremo** pode ser interpretado de dois modos
- Um bem supremo completo seria a felicidade completa
- Isto não é possível: as contingências do mundo não o permitem
- Não podemos, por exemplo, eliminar todas as doenças e acidentes naturais

# Discussão do argumento

- Mas podemos fazer o melhor que for possível
- E se só isso for possível, só isso temos o dever de fazer
- Ora, Deus não tem de existir para o melhor possível ser possível
- Deus só tem de existir para o bem supremo completo ser possível
- Logo, não temos de aceitar que Deus existe para aceitar que temos o dever de promover o bem supremo que for possível

Introdução ao estudo das derivações

# Dedução natural

# O que são derivações?

- Entendidas informalmente, as derivações são maneiras de mostrar rigorosamente, passo a passo, que uma dada conclusão se segue de uma dada premissa ou conjunto de premissas

# Um exemplo incompleto

1.  $P \rightarrow Q$  [premissa]
2.  $Q \rightarrow R$  [premissa]
3.  $P$  [premissa]
4.  $Q$  1, 3 *modus ponens*
5.  $R$  2, 4 *modus ponens*

O último passo é a conclusão

# Uma analogia

- Com um número finito de regras gramaticais podemos formar um número infinito de frases com sentido
- Com um número finito de raciocínios válidos (apenas 10) podemos demonstrar a validade de qualquer outro raciocínio
  - Isto é possível porque os raciocínios complexos se reduzem a cadeias de raciocínios simples

# Comparação

1. Mecânicos
2. Determinam a validade ou a invalidade
3. Com muitas variáveis, ficam enormes e repetitivos
4. Não se pode aplicar a outras áreas da lógica
5. Não exhibe o raciocínio
6. Muito fáceis

**Inspetores de circunstâncias**

1. Criativas
2. Demonstram a validade apenas
3. O número de variáveis não torna só por si as derivações maiores
4. Podemos aplicar a qualquer área da lógica formal
5. Exibe o raciocínio
6. Algumas são difíceis

**Derivações**

# Modelos do raciocínio

- As derivações são modelos simplificados do raciocínio cuidadoso
- No raciocínio cuidadoso procede-se passo a passo, justificando cada passo
- Em cada passo usamos apenas um princípio lógico para concluir o que concluimos
- E os princípios lógicos que usamos são todos auto-evidentes
  - E podemos demonstrá-los usando inspetores

# O mesmo exemplo incompleto

1.  $P \rightarrow Q$  [premissa]
2.  $Q \rightarrow R$  [premissa]
3.  $P$  [premissa]
4.  $Q$  1, 3 *modus ponens*
5.  $R$  2, 4 *modus ponens*

*Modus ponens:*

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

# *Modus ponens*

<b>P Q</b>	<b><math>P \rightarrow Q, P \neq Q</math></b>		
V V	V	V	V
V F	F	V	V
F V	V	F	F
F F	V	F	F

# Uma derivação completa

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$$

Prem 1.  $P \rightarrow Q$

Prem 2.  $Q \rightarrow R$

Prem 3.  $P$

1,3 4.  $Q$       1,3  $E \rightarrow$

1,2,3 5.  $R$       2,4  $E \rightarrow$

# Premissas

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$

Prem 1.  $P \rightarrow Q$

Prem 2.  $Q \rightarrow R$

Prem 3.  $P$

1,3 4.  $Q$       1,3  $E \rightarrow$

1,2,3 5.  $R$       2,4  $E \rightarrow$

# Premissas

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$

Prem 1.  $P \rightarrow Q$

Prem 2.  $Q \rightarrow R$

Prem 3.  $P$

1,3 4.  $Q$  1,3  $E \rightarrow$

1,2,3 5.  $R$  2,4  $E \rightarrow$

# Coluna 1: cálculo de premissas

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$

Prem 1.  $P \rightarrow Q$

Prem 2.  $Q \rightarrow R$

Prem 3.  $P$

1,3 4.  $Q$       1,3  $E \rightarrow$

1,2,3 5.  $R$       2,4  $E \rightarrow$

# Coluna 2: numeração dos passos do raciocínio

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$$

Prem 1.  $P \rightarrow Q$

Prem 2.  $Q \rightarrow R$

Prem 3.  $P$

1,3 4.  $Q$       1,3  $E \rightarrow$

1,2,3 5.  $R$       2,4  $E \rightarrow$

# Coluna 3: raciocínio

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$

Prem 1.  $P \rightarrow Q$

Prem 2.  $Q \rightarrow R$

Prem 3.  $P$

1,3 4.  $Q$       1,3  $E \rightarrow$

1,2,3 5.  $R$       2,4  $E \rightarrow$

# Coluna 4: justificação do raciocínio

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$$

Prem 1.  $P \rightarrow Q$

Prem 2.  $Q \rightarrow R$

Prem 3.  $P$

1,3 4.  $Q$       1,3  $E \rightarrow$

1,2,3 5.  $R$       2,4  $E \rightarrow$

# Dez regras primitivas

Operador	Regra de Introdução	Regra de Eliminação
Conjunção	$I_{\wedge}$	$E_{\wedge}$
Condicional	$I_{\rightarrow}$	$E_{\rightarrow}$
Disjunção	$I_{\vee}$	$E_{\vee}$
Negação	$I_{\neg}$	$E_{\neg}$
Bicondicional	$I_{\leftrightarrow}$	$E_{\leftrightarrow}$

Dedução natural

# Regras primitivas

# Introdução da conjunção

Prem 1. A

Prem 2. B

1,2 3.  $A \wedge B$  1,2  $I_{\wedge}$

- O passo 3 depende de todas as premissas de que dependerem os passos 1 e 2

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline A \wedge B \end{array}$$

# Eliminação da conjunção

Prem 1.  $A \wedge B$

1 2.  $A$       1  $E_{\wedge}$

- O passo 2 depende de todas as premissas de que depender o passo 1

$$\frac{A \wedge B}{A}$$

# Eliminação da condicional (*modus ponens*)

Prem 1.  $A \rightarrow B$

Prem 2.  $A$

1,2 3.  $B$       1,2  $E\rightarrow$

- O passo 3 depende de todas as premissas de que dependerem os passos 1 e 2

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

# Introdução da condicional

Sup 1. A  
      ⋮  
1 3. B  
      4.  $A \rightarrow B$  1-3  $\rightarrow$

- O passo 4 depende de todas as premissas de que depender o passo 3, exceto 1

$$\frac{A \vdash B}{A \rightarrow B}$$

# Derivações e condicionais

- Se demonstramos que B se conclui de A, podemos concluir que a condicional entre A e B é verdadeira
- As condições que fazem um argumento dedutivo válido também fazem a condicional respectiva ser verdadeira

# Condições de validade e de verdade

- Um argumento dedutivo válido pode ter tudo menos premissas  $V$  e conclusão  $F$
- Uma condicional verdadeira pode ter tudo menos antecedente  $V$  e conclusão  $F$

# Transformações

- Todo o argumento dedutivo pode ser transformado numa condicional
- Se o argumento original era válido, a condicional resultante é verdadeira

# Exemplo

- ⦿ Argumento válido
  - Platão e Aristóteles eram gregos; logo, Platão era grego.
  - $P \wedge Q \vdash P$
- ⦿ Condicional verdadeira
  - Se Platão e Aristóteles eram gregos, Platão era grego.
  - $(P \wedge Q) \rightarrow P$

# Eliminação da condicional

- Na regra da eliminação da condicional transformamos uma subderivação numa condicional
- Depois de termos derivado B de A, afirmamos  $A \rightarrow B$

# Um exemplo

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$   
[transitividade da condicional]

Prem 1.  $P \rightarrow Q$

Prem 2.  $Q \rightarrow R$

Sup 3.  $P$

# Um exemplo

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$   
[transitividade da condicional]

Prem 1.  $P \rightarrow Q$

Prem 2.  $Q \rightarrow R$

Sup  $\left| \begin{array}{l} \hline 3. P \end{array} \right.$

# Um exemplo

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$   
[transitividade da condicional]

Prem 1.  $P \rightarrow Q$

Prem 2.  $Q \rightarrow R$

Sup 3.  $P$

1,3 4.  $Q$       1,3  $E \rightarrow$

# Um exemplo

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$   
[transitividade da condicional]

Prem 1.  $P \rightarrow Q$

Prem 2.  $Q \rightarrow R$

Sup	3. $P$	
1,3	4. $Q$	1,3 $E \rightarrow$
1,2,3	5. $R$	2,4 $E \rightarrow$

# Um exemplo

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$   
[transitividade da condicional]

Prem 1.  $P \rightarrow Q$

Prem 2.  $Q \rightarrow R$

Sup 3.  $P$

1,3 4.  $Q$  1,3  $E \rightarrow$

1,2,3 5.  $R$  2,4  $E \rightarrow$

1,2 6.  $P \rightarrow R$  3-5  $I \rightarrow$

# Introdução da condicional

Sup 1. A  
    ⋮  
1 3. B  
    4.  $A \rightarrow B$  1-3  $\rightarrow$

- O passo 4 depende de todas as premissas de que depender o passo 3, exceto 1
- No passo 4 elimina-se a dependência da Suposição 1

# Segundo exemplo

$(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$   
[exportação]

Prem	1. $(P \wedge Q) \rightarrow R$
Sup	2. $P$

# Segundo exemplo

$(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$   
[exportação]

Prem	1. $(P \wedge Q) \rightarrow R$
Sup	2. $P$
Sup	3. $Q$

# Segundo exemplo

$(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$   
[exportação]

Prem	1.	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	
Sup	2.	$P$	
Sup	3.	$Q$	
2,3	4.	$P \wedge Q$	2,3 $I_{\wedge}$

# Segundo exemplo

$(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$   
[exportação]

Prem	1.	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	
Sup	2.	$P$	
Sup	3.	$Q$	
2,3	4.	$P \wedge Q$	2,3 $I_{\wedge}$
1,2,3	5.	$R$	1,4 $E_{\rightarrow}$

# Segundo exemplo

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

[exportação]

Prem	1.	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	
Sup	2.	$P$	
Sup	3.	$Q$	
2,3	4.	$P \wedge Q$	2,3 $I_{\wedge}$
1,2,3	5.	$R$	1,4 $E_{\rightarrow}$
1,2	6.	$Q \rightarrow R$	3-5 $I_{\rightarrow}$

# Segundo exemplo

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

[exportação]

Prem	1.	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	
Sup	2.	$P$	
Sup	3.	$Q$	
2,3	4.	$P \wedge Q$	2,3 $I_{\wedge}$
1,2,3	5.	$R$	1,4 $E_{\rightarrow}$
1,2	6.	$Q \rightarrow R$	3-5 $I_{\rightarrow}$
1	7.	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	2-6 $I_{\rightarrow}$

# Exercícios

Demonstre a validade das seguintes formas argumentativas pelo método da dedução natural:

1.  $P \wedge Q \vdash Q \wedge P$  [comutatividade]
2.  $P \wedge (Q \wedge R) \vdash (P \wedge Q) \wedge R$   
[associatividade]